$$P = v^T . v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} . (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_v(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

2.- On considère l'espace vectoriel R^3 et soit $\{v_1, v_2\} = \{(1.0.0), (0.1.0)\}$ une base orthonormale du plan $(\Pi = \langle v_1, v_2 \rangle)$.

$$P_\Pi = v_1^T . v_1 + v_2^T . v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\Pi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition :

La meilleure approximation d'un vecteur $u \in R^n$ a un sous espace vectoriel $S \subset R^n$, est la projection de u sur S : $P_S(u)$; c.a.d. si $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ est une base orthonormale de S, alors

$$P_S = v_1^T . v_1 + v_2^T . v_2 + \cdots + v_m^T . v_m$$

3.3 Bases orthonormales : Méthode de Gram-Schmidt

Théorème :

De toute base $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de R^n, on peut obtenir une autre base $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ orthonormale.

Démonstration :

$$\begin{array}{ccccccc} B & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & B' \\ \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} & \rightarrow & & \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} & & \rightarrow & \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \end{array}$$

1. $u_1 \rightarrow w_1 = u_1 \rightarrow v_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}$.

2. $v_1, u_2 \rightarrow w_2 = u_2 - P_{v_1}(u_2) \rightarrow v_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|}$.

$$v_2 = \frac{u_2 - (v_1^T . v_1) u_2}{\|w_2\|} .$$

3. $v_1, v_2, u_3 \rightarrow w_3 = u_3 - P_{\Pi}(u_3) \rightarrow v_3 = \dfrac{w_3}{\|w_3\|}$.

$$v_3 = \frac{u_3 - (v_1^T . v_1) u_3 - (v_2^T v_2) u_3}{\|w_3\|}$$

$\vdots$

m). $v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}, u_m \rightarrow$

$$w_m = u_m - (v_1^T v_1) u_m - (v_2^T v_2) u_m \cdots - (v_{m-1}^T v_{m-1}) u_m$$

$$v_m = \frac{w_m}{\|w_m\|}.$$

Exemple :

$u_1 = (1,1); \quad ; u_2 = (1,2)$

$$\begin{array}{ccccc} B & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & B' \\ \{u_1, u_2\} & \rightarrow & \{w_1, w_2\} & \rightarrow & \{v_1, v_2\} \end{array}$$

$w_1 = (1,1); \quad ; v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}(1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$

$$w_2 = u_2 - v_1^T v_1 u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.4 Diagonalisation orthogonale. Matrices symétriques

$$A = \underbrace{P}_{les\ colones:\ vecteurs\ propre\ de\ A} .D.P^{-1}, \quad A \in R^{n \times n}$$

Si ces vecteurs forment une base orthonormale de R^n , alors $P.P^T = P^T P = I.$

Toujours, on peut prendre les vecteurs propres v et tels que

$$\|v\| = 1 \Rightarrow P^{-1} = P^T \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

<u>Théorème :</u>

Si $A = A^T$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont les valeurs propre de $A \Rightarrow v_1 . v_2{}^T$ où $v_1, \ v_2$ sont les vecteurs propre associées a $\lambda_1 \ \ et \ \ \lambda_2.$