3.1. Produit scalaire, Norme, Orthogonalité

Nous considérons un espace vectoriel $(V,+,\bullet)$, et on rappelle le produit scalaire $*$ définit par :

Définition :

$$* \quad \begin{array}{l} V\times V \to \Re \\ (v,w)\to v*w \end{array}$$

Tel que :

i) $u*w=w*u$
ii) $v*(u+w)=(v*u)+(v*w)$
iii) $v*v=0 \Leftrightarrow v=0$
iv) $v*(\lambda\bullet w)=\lambda\bullet(v*w)$

<u>Exemple :</u>

1) $\Re^3\times\Re^3\to\Re$

$$Soient \quad v=(x,y,z)\in\Re^3; w=(a,b,c)\in\Re^3 \quad et$$

$$(v,w)\to v*w=(x,y,z).\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=ax+by+cz\in\Re$$

2) $\Re^2\times\Re^2\to\Re$

$$((x,y),(a,b))=(u\ ,v\ )\to u*v=(x,y)\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=u\ .v^t\ =(x,y).\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=ax+by$$

3) $\Re^2\times\Re^2\to\Re$

$$((x,y),(a,b))\to u*v=(x,y)\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=2ax+2by+2ay+4by$$

Vérifier que c'est un produit scalaire !!
En effet,

iii)
$$u*u=(x,y)\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2x^2+4xy+4y^2$$
$$=(x+2y)^2+x^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x+2y=0\Rightarrow x=y=0\Rightarrow u=(0,0)\end{cases}$$

Remarque :

- La norme $\|v\|=\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{v\cdot v^t}$ est appellé norme euclidienne de v.

Définition

Dans un espace vectoriel $(V,+,\bullet)$, on introduit

$$\|.\|:\begin{array}{l}V\rightarrow\Re^+\\ v\rightarrow\|v\|=\sqrt{v.v^T}\end{array}$$

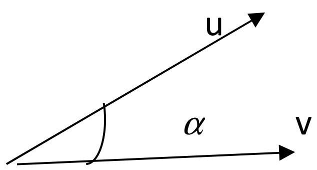
Cette opération est appelée la norme de v.

Proposition

i) $\|v\|=0\Leftrightarrow v=0\rightarrow\|v\|$: longueur

ii) $\|\lambda v\|=|\lambda|\times\|v\|$

iii) $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$



$$\cos(\alpha)=\frac{u*v^T}{\|u\|.\|v\|}$$

Remarque :

u et v sont deux vecteurs orthogonaux si seulement si :
$\cos(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\pi/2\Rightarrow u*v^T=0$

Exemple :

1) (produit scalaire euclidien)
$u=(1,0);\quad v=(0,2)$

$$u * v = u^T.v = (1,0).\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 0$$

2) (autre produit scalaire)

$u = (1,-1);\ v = (1,0)$

$$u * v = (1,-1).\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 0$$

u et v sont deux vecteurs orthogonaux par rapport à ce produit scalaire, mais **pas** par rapport au produit scalaire euclidien.

3) $\Re^n \quad u * v = u^T.v; \quad \|u\| = \sqrt{u^T u}$

Définition :

Une base orthogonale $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ de $\Re^n$ est une base où $u_i * u_j = 0 \quad \forall i \neq j$.

Exemple

$\{(2,0);(0,3)\}$Est une base orthogonale dans $\Re^2$

Définition

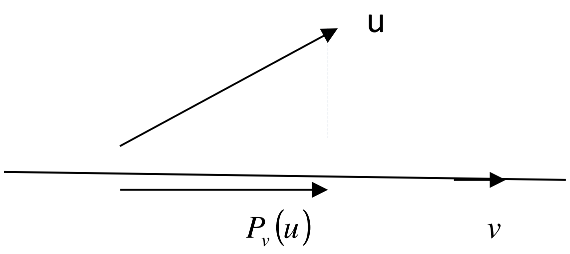
Une base ortho normale $\{u_1, u_2, ...u_n\}$de $\Re^n$, est une base orthogonale, de plus $\|u_i\| = 1 \ \ \forall i = 1,...,n.$

Exemple :

La base canonique de $\Re^n$.

4.2 Projection Orthogonale.

1) Projection d'un vecteur sur une droite



$$\frac{\|P_v(u)\|}{\|u\|}=\cos(\alpha)=\frac{u.v^T}{\|u\|\times\|v\|}$$

$$\|P_v(u)\|=\frac{u.v^T}{\|v\|}$$

$$P_v(u)=\frac{u.v^T}{\|v\|}\bullet\frac{v}{\|v\|}$$

$$P_v(u)=\frac{u.v^T}{\|v\|^2}\bullet v$$

Exemple :

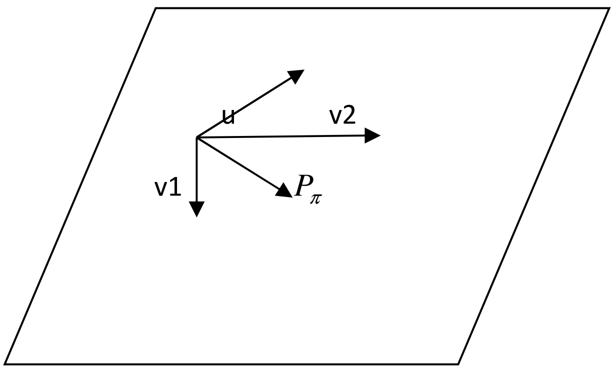
$$u=(2,2)$$
$$v=(3,0)$$

$$P_v(u)=\frac{(2,2).\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}{\left[(3,0)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right]^2}\bullet\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{6}{9^2}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/9\\0\end{pmatrix}$$

B)Projection d'un vecteur sur un plan

Soients $\{v_1,v_2\}$ une base orthogonale du plan π

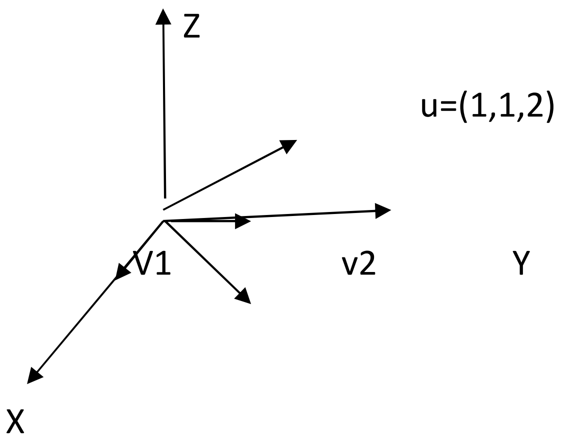


$$P_1(u)=\frac{u\ v_1^{\ t}}{\|v_1\|^2}\bullet v_1$$: Projection sur v1

$$P_2(u)=\frac{u\ v_2^{\ t}}{\|v_2\|^2}\bullet v_2$$: Projection sur v2

$$P_\pi(u)=P_1(u)+P_2(u)=\frac{u\ v_1^{\ t}}{\|v_1\|^2}v_1+\frac{u\ v_2^{\ t}}{\|v_2\|^2}v_2$$

Exemple :



v1= (1,0, 0) v2= (0, 1,0)

$$P_\pi(u) = \left((1,2,2)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \left((1,1,2).\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3.2 Projection d'un vecteur sur un HIPER PLAN de $\Re^n$

On prend une base othonormal $\{v_1, v_2, ...v_m\}$ de l'hiperlan H $(m \le n)$ de $\Re^n$ et $u \in \Re^n$.
Donc la projection de u sur H est :

$$P_H(u) = (u \; .v_1^T) \bullet v_1 + (u \; v_2^T) \bullet v_2 + ...+ (u \; v_m^T) \bullet v_m$$

On prend $u = (x_1, x_2 .....x_n)$ et $v = (y_1, y_2 .....y_n)$ avec $\|v\| = 1$

$$P_v(u) = (u.v^T) \bullet v = \left[(x_1 + \cdots + x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)y_1\\(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)y_2\\\vdots\\(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)y_n\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}y_1^2+y_1y_2+\cdots+y_1y_n\\y_2y_1+y_2^2+\cdots+y_2y_n\\\vdots\\y_ny_1+y_ny_2+\cdots+y_n^2\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}_{u}=(v.v^T)u$$

Définition :

$P_v = v.v^t$ est une matrice de projection sur v (v est un vecteur uniatire).

Propriétés :

$$P_v^T.P_v=(v.v^T)^T.(v.v^T)\;=v.\underbrace{v^T.v}_{=1}.v^T=v.v^T=P_v.$$

$$P_v^T.=(v.v^T)^Tv.v^T=P_v.$$

Définition :

Toute matrice P qui vérifie $\begin{cases}P^T=P\\P^2=P\end{cases}$ s'appelle matrice de projection.

En générale, si on a une base $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ d'un sous espace vectoriel de R^n $(V=\langle v_1,v_2,\cdots,v_m\rangle)$ avec $\|v_1\|=\|v_2\|=\cdots=\|v_m\|$ et $v_i.v_j^t=0,\forall i\neq j$ c.a.d. que $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ est une base orthonormale de V, alors la matrice

$$v_1^T.v_1+v_2^T.v_2+\cdots+v_m^T.v_m$$

est une matrice de projection, et projete sur l'espace vectoriel $(V=\langle v_1,v_2,\cdots,v_m\rangle)$.

Exemple :

1.- $v=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}});\;\|v\|=1.$

La matrice de projection sur v ou sur la droite $\{(x,x)/x\in R\}$ est