$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \\ y = -x \\ z = x \end{cases}$$

$Ker(f) = \{(x,-x,x) = x(1,-1,1); x \in \Re\}$. $Dim(Kerf) = 1$

Exemple

$$f : \begin{array}{l} \Re^3 \rightarrow \Re^2 \\ (x,y,z) \rightarrow (x+y,0) \end{array}$$

$$\operatorname{Im}(f) = \{(u,v) \in \Re^2 : (u,v) = (x+y,0) / (x,y,z) \in \Re\}$$

$$= \{(u,0) : u \in \Re\}$$

__Proposition__

$f : V \rightarrow W$ est une application linéaire

$\Rightarrow f(0) = 0$

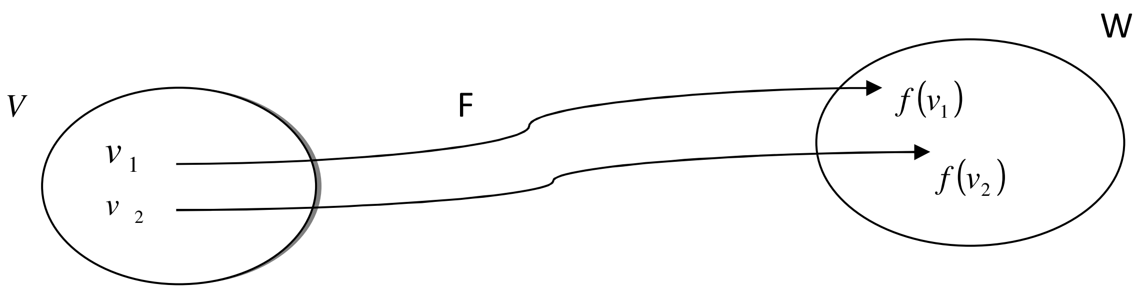
__Démonstration__

$f(v) = f(v+0) = f(v) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

__Proposition__

Si $f(v_1)$ et $f(v_2)$ sont linéairement indépendants

$\Rightarrow v_1$ et v_2 sont linéairement indépendants.



__Démonstration__

Si V_1 et V_2 sont linéairement dépendantes $\Rightarrow V_1 = \alpha V_2$

$0 = f(V_1 - \alpha V_2) = f(V_1) - \alpha f(V_2) \Rightarrow f(V_1) = \alpha f(V_2)$

Remarque 1

v_1, v_2 linéairement indépendants $\not\Longrightarrow$ $f(v_1)$ Et $f(v_2)$ sont linéairement indépendants

Exemple :

$$f : \begin{matrix} \Re^3 \to \Re^2 \\ (x, y, z) \to (0, x + zy) \end{matrix}$$

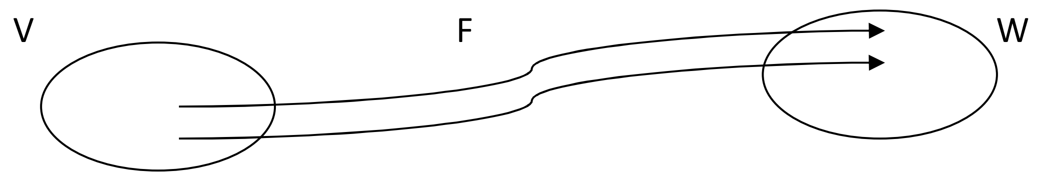
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. Cependant,

$\begin{matrix} f(1,0,0) = (0,1) \\ f(0,1,0) = (0,2) \end{matrix}$ sont linéairement dépendants.

Remarque 2

$f(v_1)$ Et $f(v_2)$ sont linéairement dépendants $\not\Longrightarrow$ v_1 Et v_2 sont linéairement dépendantes

Définition : Application injective



Définition (Application Injective)

$f : V \to W$ est une application injective si seulement si $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

Définition (Application Surjective)

$f : V \to W$ Est une application surjective $\Leftrightarrow$ $\forall w \in W, \exists v \in V : f(v) = w$

<u>Définition</u> (Application Bijective)

$f : V \to W$ Est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} &\Re^3 \to \Re^2 \\ &(x, y, z) \to (0, x + zy) \end{aligned}$$

f n'est pas injective

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (0,1) \\ f(1,0,0) &= (0,1) \end{aligned}$$

Exemple 2 :

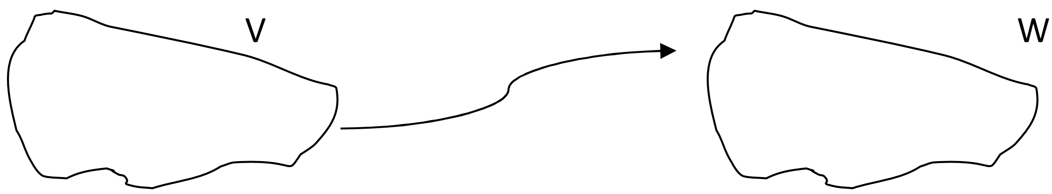
$$f : \begin{aligned} &\Re^2 \to \Re^3 \\ &(x, y) \to (-x, -y) \end{aligned}$$

f est une application bijective.

<u>Théorème :</u>

F est une application injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$

<u>Lemme 1 :</u>



Si $DimV = n$ et $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_n$ sont linéairement indépendants. $\Rightarrow \{u_1, u_2, \ldots. u_n\}$ est une base de V.

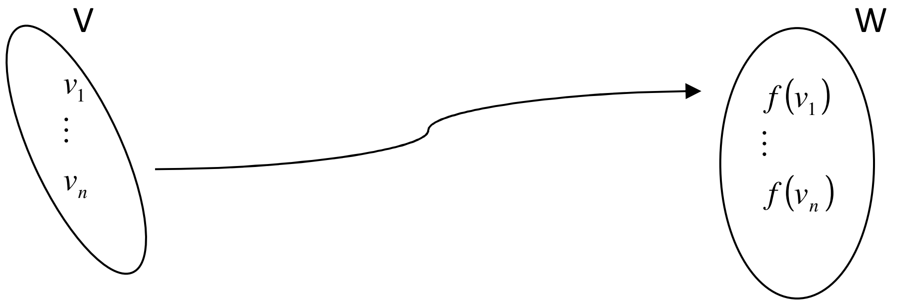
<u>Lemme 2 :</u>

Si $f : V \to U$ est surjective et $\{u_1, u_2, \ldots. u_n\}$ est une base de $V \Rightarrow \{f(u_1), f(u_2), \ldots. f(u_n)\}$ est une base de V.

Définition Si $f:V \to U$ est une application linéaire bijective, donc elle est dite isomorphisme.

Isomorphisme et coordonnées :

Soit $f:V \to W$ est une application linéaire



* Soit $B_v \equiv \{v_1, v_2, ...v_n\}$une base de V.

$$v \in V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... x_n v_n$$

$$f(v) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... x_n v_n) = x_1 f(v_1) + ... + x_n f(v_n)$$

* Soit $B_w \equiv \{w_1, w_2, ...w_n\}$ une base de W, donc on exprime $f(v_i)$ dans B_w :

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ...+ a_{m1}w_m$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{22}w_2 + ...+ a_{mn}w_m.$$

$$f(v) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... x_n v_n) = x_1 f(v_1) + ... + x_n f(v_n)$$
$$= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 ... + a_{m1}w_m) + ... + x_n(a_{n1}w_1 + ... + a_{nm}w_m)$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{m1}x_m)w_1 + ... + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)w_m$$

$$= y_1 w_1 + y_2 w_2 + ... + y_m w_m.$$

On rappelle que :

$x_1, ...x_n$ sont les coordonnés de V en B_v et $y_1, ...y_n$ sont les coordonnés de $f(v)$en B_w.

Expression matricielle

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Coord. de f(v) En B_w — Coord. de v en B_v

$Y = AX \Rightarrow$ A : matrice associée à f sur les bases B_w et B_v

Définir $f \Leftrightarrow$ { Fixer B_w Et B_v et donner A.

Exemple :

$$f : \begin{array}{l} \Re^3 \to \Re^2 \\ (x, y, z) \to f(x, y, z) = (x + y, y + z) \end{array}$$

B_v : Base canonique de $\Re^3$: $B_v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B_w : Base canonique de $\Re^2$: $B_w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\begin{array}{l} f(1, 0, 0) = (1, 0) \\ f(0, 1, 0) = (1, 1) \\ f(0, 0, 1) = (0, 1) \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

__Vérification :__

$$f(1,1,1) = (2,2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$