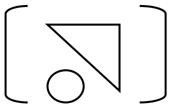
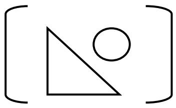
Chapitre 2

Application linéaire

I- Type de matrice

-    :   matrice triangulaire supérieure.
-    :   matrice triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:   matrice identité.
- Si $A = A^T$:   A est symétrique. Exemple : A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- Si $A = -A^T$:A est antisymétrique. Exemple : A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $A * A^T : I$: A orthogonal. Exemple : A=$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- A est une matrice nilpotente d'indice n si $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$,……, $A^{n-1} \neq 0$, $A^n = 0$.

  Exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **Rang de A :**

  Rang(A) : le nombre maximal de ligne ou colonnes linéairement indépendants.
- **Déterminant :**

  Pour calculer le déterminant,

  $$\rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}$$

  Règlement de Sarrus :

  $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

  Développer selon une ligne ou une colonne.

  En utilisant la règle de Gauss

Propriété 1

Si deux lignes ou colonnes sont égaux ou proportionnels donc det(A)=0.

Propriété 2.

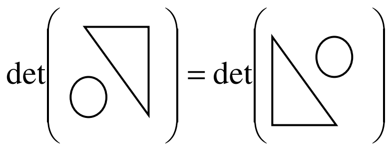
$$\det\begin{pmatrix} U_1+U \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} U \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix}$$

Exemples :

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

b) $\det\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2+\alpha U_1 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix}$

Proposition 3.


= Produit des éléments de la diagonal.

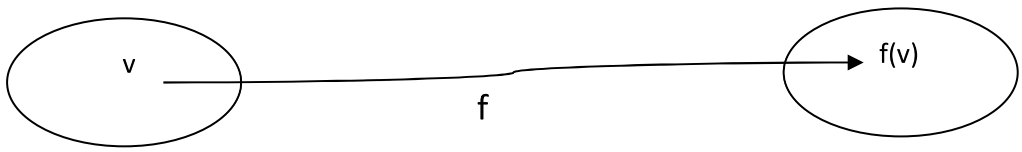
Exemple :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{3} \end{pmatrix} = (-1).(-3).\left(\frac{-4}{5}\right) = 4.$$

Si $A \in M_{n,n}$;

- $Rg(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- $Rg(A) \langle n \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

II- Application linéaire



Définition :

Soient V et W deux espaces vectoriels. L'application

$$\begin{aligned} f &: V \to W \\ v &\to w = f(w) \end{aligned}$$ est une application linéaire si :

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \Re, & f(\alpha . v) = \alpha . f(v) \\ \forall v_1, v_2 \in V, & f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \end{cases}$$

Exemple :

$V = \Re^2,$ $\qquad W = \Re^3$

$$\begin{aligned} f :\ & \Re^2 \to \Re^3 \\ & (x, y) \to (y, x, x + y) = f(x, y) \end{aligned}$$

f est une application linéaire.

En effet,

$$f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y, \alpha x, \alpha x + \alpha y) = \alpha(y, x, x + y) = \alpha f(x, y)$$

$$\begin{aligned} f((x, y) + (z, w)) &= f(x + z, y + w) = (y + w, u + z, x + z, y + w) \\ &= (y, x, x + y) + (z, w, z + w) = f(x, y) + f(z, w) \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$V = \Re^2,$ $\qquad W = \Re^3$

$$g : \begin{aligned} & \Re^2 \to \Re^3 \\ & (x, y) \to (yx, x, y) = f(x, y) \end{aligned}$$

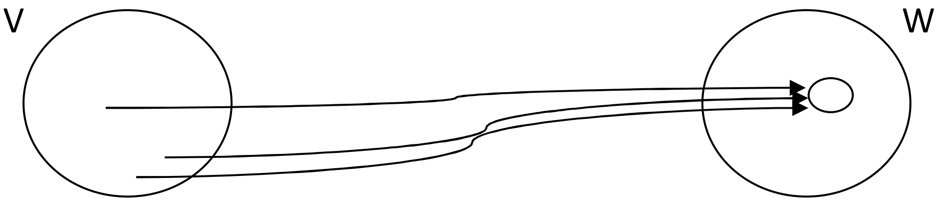
$$f(ax, ay) = (a^2 xy, ay, ax) \neq af(x, y) = a(xy, y, x) = (axy, ay, ax)$$

g n'est pas une application linéaire .

Définition (Kerf)

Définition

Ker(f) $= \{v \in V : f(v) = 0\}$



Définition

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in W, \exists v \in V ; f(v) = w\}$$

Proposition

Ker(f) est un sous espace vectoriel de W.

Démonstration

Si $v \in Ker(f) \Rightarrow av \in Ker(f).?$

$$v \in Ker(f) \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow a.f(v) = 0 \Rightarrow f(a.v) = 0$$

Si v_1 et $v_2 \in Ker(f) \Rightarrow v_1 + v_2 \in Ker(f).?$

$$v_1, v_2 \in Kerf \Rightarrow f(v_1) = f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) = 0$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \in Ker(f)$$

Exemple

$$f : \begin{array}{l} \Re^3 \to \Re^2 \\ (x, y, z) \to (x + y, y + z, z - x) \end{array}$$

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \Re^3 : (x + y, y + z, z - x) = (0,0,0)\}$$