On considère un ensemble des vecteurs $\{u_1, u_2, ... u_n\} \subset V$. On appelle le rang de $\{u_1, u_2, ... u_n\}$ au nombre maximal de vecteurs indépendants dans $\{u_1, u_2, ... u_n\}$.

Exemple :

$$\{(1,0), (0,1), (1,1)\} \subset V = \Re^2$$

- (1,0), (0,1) sont deux vecteurs indépendants
- (1,0), (0,1), (1,1) sont dépendants.

Rang $\{(1,0), (0,1), (1,1)\} = 2$

Exemple :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On peut vérifier que rang(S)=3.

<u>Remarque :</u>

Rang $\{u_1, ... u_n\} \leq$ Dim V.

<u>Définition :</u>

Soit $A \in M_{n,m}$. On appelle le rang de A égale au nombre maximal de ligne ou colonne linéairement indépendant. (Les lignes sont vues comme n-vecteurs de $\Re^n$) et (Les colonnes sont vues comme m-vecteurs de $\Re^m$).

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 vecteur de $\Re^3$; 2 vecteur de $\Re^2$

Rang $A \leq$ min $\{n, m\} = 2$

Rang (A)=2

2-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Rang (A)=1.

3- METHODE DE GAUSS :

$$A_1 = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 & - \\ - & u_n & - \end{pmatrix} \approx\approx A_2 = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 + \alpha_2 \times u_1 & - \\ - & u_n + \alpha_n \times u_1 & - \end{pmatrix},$$

$$Rg\left(A_1\right) = Rg\left(A_2\right)$$

C) Résolution des systèmes linéaires.

Un système de n-équations et m-variables inconnues, est un ensemble des équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{nm}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{nm}x_m = b_2 \\ \quad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...+ a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \in \Re$ sont les coefficients du système linéaire, x_i sont les inconnues et les b_i sont les termes indépendants.

Résoudre le système, c'est trouver les valeurs de $x_1, x_2, ...x_m$ vérifiant les équations antérieurs.

Les systèmes sont classifiés de la manière suivante :

- Système incompatible : s'il n'admet pas de solution.
- Systèmes compatible : s'il admet au moins une solution.

- Compatible déterminé : s'il admet un nombre fini de solution.
- Compatible indéterminé : s'il admet un nombre infini de solution.

Exprimons le système sous sa forme matricielle:

Le système antérieur peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A.X = B$$

A est dite matrice du système $(A|B) = \begin{pmatrix} a_{ij} & & b_1 \\ & & \vdots \\ & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$

<u>Théorème de Rouche-Frobenius :</u>

Le système AX=B est compatible $\Leftrightarrow \quad Rg\ (A) = Rg\ (A|B)$

De plus si le système est compatible, et soient $r = Rg\ (A) = Rg\ (A|B)$, m le nombre de variable inconnues, alors

1- Si r=m $\Rightarrow$ le système est compatible et déterminé.

2- Si r <m $\Rightarrow$ le système est compatible et indéterminé, c.-à-d. qu'il admet un nombre infini de solutions dépendant de (m-r) paramètres.

<u>Méthode de Gauss :</u>

Si dans un système des équations linéaire,

- On inter change l'ordre des équations,
- On multiplie une équation par un scalaire non-nul,

- On ajoute à une équation une combinaison linéaire des équations restante ; alors on obtient un système équivalent au système initial (les deux systèmes ont les mêmes solutions). Sur ces propriétés se base la méthode de Gauss.

Exemple 1:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3y - 3z = -6 \\ -z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ x + y + az = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array}\right)$$

i) Si a=1 ($r = Rg(A) = Rg(A|B) = 3$) le système admet une seule solution.

ii) Si $a \neq 1 \begin{cases} rg(A) = 3 \\ rg(B) = 4 \end{cases} \rightarrow$ le système est incompatible et il n'admet pas de solution.