Exemple :

1) $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$ Donc $\{(1\ ,0\ ),\ (0\ ,1\ )\}$ est un système générateur.

2) $\{(1,0),(0,1),(1,1)\ \}$ est un système générateur de $\Re^2$ car

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) + z(1,1)$$

3) $\{(1,0)\ \}$ n'est pas un système générateur.

D) Base.

__Définition :__
Une base est un système générateur linéairement indépendant.

__Théorème :__
Tout espace vectoriel admet une base.

E) Dimension

__Définition :__
La dimension de l'espace vectoriel V est le nombre de vecteurs que contient une base.

Exemple :

On considère l'espace vectoriel $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a,b,c,d \in \Re \right\}$.

- $\begin{pmatrix} a & b \\ e & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un système générateur de M_2.

- $x\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\t=0\end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

Finalement, $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ alors est une base de M_2, et on a dim(M_2)=4.

Définition

Soit $B=\{u_1,u_2,....u_3\}$ une base de V. donc $\forall v\in V$ tel on a $v=x_1u_1+x_2u_2+.....+x_nu_n$.

$x_1,x_2,....x_n$ s'appellent les coordonnés du vecteur v dans la base B.

Exemple :

On considère le système $\{(1,1),(1,-1)\}$. On a $(x,y)=a(1,1)+b(1,-1)$, et par suite

$$\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=x+y\\2b=x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{x+y}{2}\\b=\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$$

Ainsi, $(x,y)=\dfrac{x+y}{2}(1,1)+\dfrac{x-y}{2}(1,-1)$.

Conclusion :

$\{(1,1),(1,-1)\}$ est un système générateur.

On suppose que $a(1,1)+b(1,-1)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$.

Par suite $(1,1)$, $(1,-1)$ sont linéairement indépendants.

Finalement, $\{(1,1),\ (1,-1)\}$ est une base de $\Re^2$.

Exemple :

Considérons $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \Re \right\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnés de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

sont (a, b, c, d).

<u>Remarque :</u>

Tout espace vectoriel de dimension n est « équivalent » à $\Re^n$.

Exemple 1 :

Dim $\Re^2 = 2.$

Soit V un espace vectoriel de dimension n, donc il admet une base $B = \{u_1, u_2, \ldots\ldots u_n\}$. Donc

$\forall v \in V,\ v = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots. + x_nu_n$.

On considère $\Re^n$ et y un vecteur $x \in \Re^n$.

$x = x_1(1,0,\ldots.,0) + x_2(0,1,\ldots.0) + \ldots.. + x_n(0,0,\ldots..,1)$

$= (x_1, x_2, \ldots.., x_n)$.

Donc on peut identifier V avec $\Re^n$.

Exemple 2 :

- $V = M_2$, $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $x \in \Re^4$
  $x = (a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$

$$2v = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

2 x = 2(a, b, c, d)= (2a, 2b, 2c, 2d) $\Leftrightarrow$ $2v = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

<u>Définition :</u>

Soient w_1, w_2 deux sous espaces vectoriels de V. la somme directe :

$$w_1 \oplus w_2 = \{v \in V : v = V_1 + V_2 / v_1 \in w_1 ; v_2 \in w_2\}$$

Exemple :

$V = \Re^3$

$w_1 = \{(x,0,0) \in \Re^3\}$; $\qquad$ $w_2 = \{(0,0,z) \in \Re^3\}$;

$w_1 \oplus w_2$ Plan XZ = $\{(x,0,z) \in \Re^3 ; x, z \in \Re\}$.

<u>Remarque :</u>

$w_1 \oplus w_2 \neq w_1 \cup w_2$

<u>Définition :</u>