Vérifiez que $\left(M_2' ,+,. \right)$ est un espace vectoriel

B) Sous espaces vectoriels

Définition

Soit V un espace vectoriel. W Un ensemble inclus dans E ($W \subset V$).

W est un sous espace vectoriel de V si seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall u, v \in W, \qquad u + v \in W \\ &\forall a \in \Re, v \in W, \qquad a.v \in W \end{aligned}$$

Remarque

Les propriétés 3-10 sont satisfaites du fait que $W \subseteq V$

Exemple : $u + v = v + u$ car $u, v \in W \subset V$.

Exemple

1) $V = \Re^2,\ W = \{x;1\} : x \in \Re)$.
   W est un sous espace vectoriel.

2) $V = \Re^2, \quad W = \{(x,1) : x \in \Re\}$
   $(x,1) + (y,1) = (x + y, 2) \notin W$ W n'est pas un sous espace vectoriel.

3) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \Re \right\}$
   Vérifiez que $(M,+,.)$ est un sous espace vectoriel

$$+ : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + e & 0 \\ b + f & c + g \end{pmatrix}$$

$$. \quad : a \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^b & a^c \end{pmatrix}$$

II - Independence linéaire. Base et dimension

A) Combinaison linéaire

Définition

Soient $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ et $a_1, a_2, ..., a_n \in \Re$.

On appelle $v = a_1u_1, a_2u_2, ..., a_nu_n$ combinaison linéaire de $u_1, u_2, ..., u_n$.

Exemple 1 :

Le vecteur $(1,2,4)$ Est-il une combinaison linéaire de $(1,1,1)$ et $(0,1,3)$?

On doit trouver $a_1, a_2 \in \Re$ tel que :

$$(1,2,4) = a_1(1,1,1) + a_2(0,1,3).$$

C.-à-d. : $(a_1, a_1, a_1) + (0, a_2, 3a_2) = (1,2,4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 1 \end{cases}$$

Exemple 2 :

Le vecteur $(1,2,4)$ Est-il une combinaison linéaire de $(0,1,1)$ et $(0,1,3)$?

Non, En effet supposons le contraire, c.à.d. que $(1,2,4) = a_1(0,1,1) + a_2(0,1,3)$ et par suite on a $1 = a_1.0 + a_2.0 = 0$ (absurde).

B) Independence linéaire

Définition

- Les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n \in V$ sont linéairement indépendants si seulement si :

$$[a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0]$$

- Les vecteurs $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n \in V$ sont linéairement dépendants s'ils existent $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in \Re$ non tous nul (au moins un scalaire différent de zéro), tel que : $a_1u_1, a_2u_2, \ldots\ldots, a_nu_n = 0$

Exemple :

1) $(1,1)$ est $(1,0)$ sont-ils linéairement indépendant. ?

$$a_1(1,1) + a_2(1,0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 0$$

Et par suite $(a_1, a_2) = (0,0)$.

2) $a_1(4,0) + a_2(0,1) + a_3(2,3) = 0 \Rightarrow (4a_1 + 2a_3, a_2 + 3a_3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{2}{4}a_3 = -\frac{1}{2}a_3 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases}$$

$$a_3 = 2$$
$$a_1 = -1$$
$$a_2 = -3$$

Ainsi, on a trouvé $(a_1, a_2, a_3) = (-1, -3, 2)$ tel que

$a_1(4,0) + a_2(0,1) + a_3(2,3) = 0$

Donc $(4,0), (0,1), (2,3)$ sont linéairement dépendant.

C) Système générateur.

Définition

On dit que $\{u_1, u_2, \ldots., u_n\}$ est un système générateur de V, si pour tout élément $v \in V$ on a $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$, avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n \in \Re$.

Exemple :

1) $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$ Donc $\{(1,0), (0,1)\}$ est un système générateur.

2) $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ est un système générateur de $\Re^2$ car

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) + z(1,1)$$

3) $\{(1,0)\}$ n'est pas un système générateur.

D) Base.

Définition :
Une base est un système générateur linéairement indépendant.

Théorème :
Tout espace vectoriel admet une base.

E) Dimension

Définition :
La dimension de l'espace vectoriel V est le nombre de vecteurs que contient une base.

Exemple :

On considère l'espace vectoriel $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \Re \right\}$.

○ $\begin{pmatrix} a & b \\ e & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un système générateur de M_2.