Université Abdelmalek Esaâdi

Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales

Tétouan

Département de Sciences Economiques et Gestion

Cours Algébre 2020-21

Professeur

Dr. Hossain Yakhlef

Programme

1. Espaces vectoriels et systèmes linéaires :
    a. Espaces vectoriels. Sous espaces vectoriels .
    b. Independence linéaire. Base et dimension, Combinaison linéaire, Somme directe. Coordonnés.
    c. Résolution des systèmes linéaires.

2. Application linéaire :
    a. Type de matrice important. Rang, déterminant, matrice inverse.
    b. Application linéaire. Application linéaire et indépendance linéaire.
    c. Isomorphismes et coordonnés. Représentation matricielle d'une application linéaire, changement de base.

3. Espace muni d'un produit scalaire
    a. Produit scalaire, Norme, Orthogonalité.
    b. Projection orthogonal.
    c. Base orthonormale, Méthode de Gram Schmidt changement de base orthonormales.
    d. Diagonalisation orthogonal. Matrice symétrique.

Chapitre 1 : Espace vectoriels et systèmes linéaires.

I - Espaces vectoriels. Sous espaces vectoriels

A) Espace vectoriel

1 –Définition

Soit V un ensemble muni de deux lois : +, .

1) Loi interne + : $\forall v, w \in V$, on a $v + w \in V$,
2) Loi externe. : $\forall v \in V, \forall k \in \Re$, on a $k.v \in V$,

Exemple

$V = \Re^2; \quad \Re^2 = \Re \times \Re = \{(x, y) : x, y \in \Re \}$

V est un espace vectoriel muni des lois $+, .$

$+ : \ (x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$

$. : \quad k.(x, y) = (k.x, k.y)$

De plus, l'espace vectoriel vérifie une série de propriétés.

3) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$
4) $\exists 0 \in V; \quad 0 + u = u + 0 = u \qquad \forall u \in V$.
5) $\forall u \in V, \ \exists w \in V$ (on la note aussi $-u$), tel que $u + w = 0$
6) $(u + v) + w = u + (v + w); \qquad \forall u, v, w \in V$
7) $(a * b).v = a.(b.v) \qquad \forall a, b \in \Re; v \in V$
8) $a.(u + v) = a.u + a.v \qquad \forall a \in \Re, \ u, v \in V$
9) $(a + b).u = a.u + b.u \qquad \forall a; b \in \Re, \ u \in V$
10) $1.u = u \qquad \forall u \in V$

Exemple :

I. $(\Re^2, +', .)$ munis des lois interne et externe définis a continuation, est-il un espace vectoriel ?

$+'$: $(x, y) +' (z, w) = (x - z, y + w)$

$.$: $a.(x, y) = (ax, ay)$

- Vérifiez les autres propriétés.

II. On définit l'ensemble

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \Re \right\}.$$

On vérifie que $(M_2, +, .)$ est un espace vectoriel.

1) $+ : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

2) $. : k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a & k.b \\ k.c & k.d \end{pmatrix}$

- Vérifions les autres propriétés :

3) $u + v = v + u$?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4) Existe t – il l'élément neutre ($\exists\ ?\ 0$) tel que $0 + u = u + 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $u + (-u) = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) $(u+v)+w = u+(v+w)$

$$\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ j & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+i & b+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix}$$

7) $(a \times b).v = a.(b.v)$

$$a \times b \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\times b).a_1 & (a\times b).b_1 \\ (a\times b).c_1 & (a\times b).d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.(b.a_1) & a.(b.b_1) \\ a.(b.c_1) & a.(b.d_1) \end{pmatrix}$$

$$= a.\begin{pmatrix} b.a_1 & b.b_1 \\ b.c_1 & b.d_1 \end{pmatrix}$$

8) $a.\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] = a.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + a.\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

9) $(a+b).\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$

10) $1.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Exercice :

On considère l'ensemble $M_2' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} : b, c, d \in \Re \right\}$ et on définit la loi interne

par $+ : \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & bf \\ cg & hd \end{pmatrix}$