Calcul de probabilité

Cours LF -S2-Partie I

Prof. El kettani Moummou

Faculté SJES de Tétouan
Université Adbel Malik Assaâdi

22 avril 2021

De la statistique descriptive à la théorie probabiliste

La statistique s'occupe principalement des phénomènes aléatoires, en se trouvant face à un ensemble des observations qui présentent une variation qui n'est pas facile à expliqué et qui nécessitent un traitement spécial (traitement statistique) pour pouvoir effectuer des conclusions

Définition

La statistique est une branche des mathématiques, qui traite la collection, l'analyse, l'interprétation et la représentation d'un grand nombre des données numérique

Les étapes d'une étude statistique

Statistique descriptive

- Collecte des données
- Planification, tabulation et graphique
- Déscription des caractéristiques

Statistique inférentielle

- Analyse formelle

Pont d'union : les lois de probabilités

Statistique descriptive $\Longrightarrow$ Statistique inférentielle

Echantillon $\rightarrow$ Probabilité $\rightarrow$ Population

Calcul de Probabilité

Experiences aléatoire et événements

•Définition d'une expérience :

Une expérience est une action qui se réalise avec l'intention de recueillir certaines observations sur les resultats.

•Définition d'une expérience aléatoire :

On dit qu'une éxperience est aléatoire si les résultats obtenus sont imprédictibles. Ca veut dire que même si on répéte l'expérience sous les mêmes conditions le resultat peut changer(il sagit d' un phénomène aléatoire)

Calcul de Probabilité

Experiences aléatoire et événements

•Exemples :

- Prix d' une action sur un marché financier
- Résultat du lancement d' un dé ou d' une pièce de monnaie
- - Taux d' interêt dans les secteurs bancaires.
- .....etc

Calcul de Probabilité
Experiences aléatoire et événements

•Définition d'un événement :

Un événement est une réalisation d' un résultat possible.

• Exemples :

1. Amener face en lançant une pièce de monnaie
2. Obtenir 5 en lançant un dé

•Définition d''un Univers (Espace d'échantillonnage) :

L'ensemble de tous les événements possibles s'appelle Univers (ou espace d'échantillonnage)

Notation Conventionnelle : Ω

Calcul de Probabilité

Experiences aléatoire et événements

Eventualité

Un élément de l' univers Ω s'appelle une éventualité

Evénement élementaire

Un événement avec une seule éventualité s'appelle événement élémentaire

• Remarque :

Un événement est une partie de l'univers Ω :

$$\text{événement} \subset \Omega$$

Calcul de Probabilité

Experiences aléatoire et événements

•Exemple

On considère lexpérience aléatoire " lancement d' un dé". Il vient que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L' événement que mène un nombre (numéro) impair est

$$A = \{1, 3, 5\}.$$

L' événement "obtenir la face 1" est

$$E = \{1\}.$$

E est un événement élémentaire. Les résultats $1, 2, \ldots, 6$ sont des éventualitées

Calcul de Probabilité

Experiences aléatoire et événements

•Remarque (importante)

Un événement "A" quelconque est réalisé si une de ses éventualités est réalisée. Dans l'exemple anterieur on a

$$\begin{aligned} A &= \{1,3,5\} \\ &= E \cup C \cup D \end{aligned}$$

Ou on a

$E = \{1\}$; événement élémentaire que mène "1"
$C = \{3\}$; événement élémentaire que mène "3"
$D = \{5\}$; événement élémentaire que mène "5"

Calcul de Probabilité

Experiences aléatoire et événements

•Question

Dans l' expérience du dé quel est l'événement qui mène un numéro pair ?

•Réponse

L' événement qui mène un nombre(numéro) Pair est l'événement contraire à

$$A = \{1, 3, 5\}$$

. Il est noté para

$$\bar{A} = \{2, 4, 6\}$$

Les événements élémentaires qui entrainent a cet événement sont $\{2\}$ ou $\{4\}$ ou $\{6\}$ $\Leftrightarrow$ Similitude ensembliste : $\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

Calcul de Probabilité
Experiences aléatoire et événements

Etant donnés A et B deux événements possible de Ω

TABLE: Similitude ensembliste

Langage Probabiliste	**Langage Ensembliste**
Evénement certain :Ω Evénement impossible :$\emptyset$	Ensemble universel :Ω Ensemble vide :$\emptyset$
Evénement contraire à A : $\bar{A}$	Complementaire de A
Evénement A ou B	$A \cup B$
Evénement A et B	$A \cap B$
Evénements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
L'événement A entraine B	$A \subset B$

Calcul de Probabilité

Experiences aléatoire et événements

•Remarque

Quand ont réalise un expériment (expérience) chaque événement a un degré de possibilité de réalisation. La mesure de degré de possibilité s'appelle Probabilité de réalisation (chance de réalisation)

Probabilité

Définition

En entend para probabilité la mesure de degrée de réalisation d'un événement d'une epreuve aléatoire.

Définition fréquentièlle : Formule d'équiprobabilité

Si tous les événments simple (eventualités) ont la même chance de réalisation (c.a.d. tous les événements sont uniformement distribués) la probabilité d'un événemet quelconque A est donnée para :

$$P(A) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

•Noter bien

Si on considère le prix d' une action cotée en bourse, l'équiprobabilité n'est pas vérifier

Probabilité

Définition axiomatique

Soit $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \subseteq \Omega\}$ l'ensemble des événements possibles de l'univers Ω

La probabilité "$p(.)$" est une application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à valeurs dans l' interval $[0, 1]$ telle que

- $p(\Omega) = 1$
- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ pour toutes événements A et B incompatibles : $A \cap B = \emptyset$

- $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ s'appelle espace probabilisé
- $p(A)$ est la probabilité de l' événement A

Calcul de probabilité

Quelques propriétés

Soient A et B deux événements quelconques de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a alors

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- si $A \subseteq B$ Alors $p(A) \leq p(B)$
- $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$

Calcul de Probabilité

Exemple

Une enquête effectuée auprès de 400 placements en portefeuille de devises auprès de la bourse de Casablanca, a montré que 160 investissement en $; 240 investissement en € et 90 investissement dans les deux devises.

1. Quelle est la probabilité qu' un investisseur investit au moins dans une devise ?
2. Quelle est la probabilité qu'il détient un portefeuille uniquement en € ?

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

Définition

Etant donné $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé, soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ telque $p(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de l'événement B par rapport à A, la quantité définie par :

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

- On lit " probabilité de B sachant A

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

•Exercice

Soit $A \in (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, montrer que l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} p_A \quad : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longrightarrow & p_A(B) = p(B/A) \end{array}$$

est une probabilité

Calcul de Probabilité
Probabilité conditionnelle

Formule de la Probabilité Totale

•Définition d'une partition(Rappel)

On dit qu' une famille des événements $(B_i)_i$ de l'univers Ω est une partition si

- Ils sont incompatibles deux a deux : $B_i \cap B_j = \emptyset; \; i \neq j$
- $\cup_i B_i = \Omega$

Calcul de Probabilité
Probabilité conditionnelle

Formule de la Probabilité Totale

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé, et $(B_i)_i$ une partition de Ω. Il vient que

$$p(A) = \sum_i p(A/B_i) \times p(B_i)$$

Comme conséquence on a :

Formule de Bayes

$$p(B_j/A) = \frac{p(B_j) \times p(A/B_j)}{\sum_i p(A/B_i) \times p(B_i)}$$

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

•Noter bien

Ces deux formules seront outiles dans les circonstances suivantes :

1. L' expérience peut être séparée en deux étapes
2. il est facil de donner une partition de tout l' espace à travèrs des événements $B_1, B_2, \ldots, \ldots B_n$ qui correspondent aux résultas de la 1° étape.
3. On connait deja (ou bien on peut calculer facilement) les probabilités $p(B_1), p(B_2), \ldots, \ldots . p(B_n)$.
4. On connait deja (ou bien on peut calculer facilement) les probabilités $p(A/B_1), p(A/B_2) \ldots, \ldots \ldots p(A/B_n)$ où A est un événement qui correspond à des résultas de la 2° étape.

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

• Usage

Quand ces circonstances se présentent, le théorème des probabilités totales sera utile pour calculer $p(A)$ et le théorème de Bayes sera très convinient pour calculer $p(B_j/A), j = 1, 2, \dots n$

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

•Exemple

On dispose de 3 pièces de monnaie ; la 1° est parfaitement équilibrée, la 2° a deux côtés piles et la 3° est truquée de façon que la probabilité d'optenir " pile" est "1/4". On tire une pièce au hazard, on la lance

1. Quelle est la probabilité de mener " pile" ?
2. Si on obtient " pile", quelle est la probabilité d' avoir lancé la 2° pièce ?

Calcul de Probabilité
Probabilité conditionnelle

•Réponse

Remarquer qu'il sagit d'une experience aléatoire en deux étapes

- $1^{\underline{o}}$ étape : Tirage d'une pièce de monnaie
- $2^{\underline{o}}$ étape : Lancement de la pièce à lair

Considérer donc les événements :

$$
\begin{aligned}
B_1 : &= \text{événement `` la première pièce de monnaie est tirée''} \\
B_2 : &= \text{événement ``la deuxième pièce de monnaie est tirée''} \\
B_3 : &= \text{événement ``la troisième pièce de monnaie est tirée''}
\end{aligned}
$$

Ces événements forme une partition de l'univers Ω en relation avec la première étape de l'expérience :

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

•Réponse-suite

Les probabilités de ces événements peuvent être calculer facilement. En effet, puisqu'il sagit de choisir une pièce entre trois, donc on aura

$$p(B_1) = p(B_2) = p(B_3) = \frac{1}{3}$$

1) Pour répondre à la première question notons par :

$$A := \text{événement “ mener pile”}$$

En utlisant la formule totale de probabilité on aura

$$p(A) = p(A/B_1) \times p(B_1) + p(A/B_2) \times p(B_2) + p(A/B_3) \times p(B_1)$$

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

• Réponse-suite

Donc reste à calculer les probabilités conditionnelles $p(A/B_1)$, $p(A/B_2)$ et $p(A/B_3)$.

- Si la premièce est choisie, la probabilité d'avoir pile est $p(A/B_1) = \frac{1}{2} \longleftarrow$ la pièce est equilibrée
- Si la deuxième pièce est choisie, la probabilité d'avoir pile est $p(A/B_2) = 1 \longleftarrow$ la pièce a deux côtés piles
- Si la troisième pièce est choisie, la probabilité d'avoir pile est $p(A/B_3) = \frac{1}{4} \longleftarrow$ la pièce est truquée

Par conséquent

$$p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12} = 0.583$$

Calcul de Probabilité

Probabilité conditionnelle

- Réponse-suite

2) Répondre à la deuxième question revient à calculer la "$p(B_2/A)$". En utilisant la formule de bayes on aura donc

$$\begin{aligned} p(B_2/A) &= \frac{p(A/B_2) \times p(B_2)}{p(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7} = 0.571 \end{aligned}$$

Calcul de Probabilité

Eévénements indépendants

Définition

On dit que deux événement A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

•Remarque

Si $p(A) \neq 0$ ou/et $p(B) \neq 0$; ces deux événements sont indépendants si et seulement si (ssi)

$$\begin{array}{ccc} p(A/B) & = & p(A) \\ & ou/et & \\ p(B/A) & = & p(B) \end{array}$$

Calcul de Probabilité

Eévénements indépendants

Langage probabiliste

On dit que la réalisation de l'événement A ne depend pas de celle de l'événement B et réciproquement

Incompatibilité "vs" independance

$\Downarrow$

Propriété.1

Deux événements incompatibles ne sont pas indépendants

Calcul de Probabilité

Eévénements indépendants

•Exemple

Considerons des familles avec 3 enfants et intéréssons- nous au sexe des enfants. On suppose que chacune des possibilités a la même probabilité "$\frac{1}{8}$". Soit

$$\begin{aligned} A: &= \text{l'événement "famille a des enfants des 2 sexes"} \\ B: &= \text{l'événement " famille a au plus une fille"} \end{aligned}$$

1. Calculer les probabilités de A et de B
2. Calculer la probabilité de A et B
3. Faisons la même chose avec des familles de 4 enfants(Devoir)

Calcul de Probabilité

Eévénements indépendants

•Réponse

A l'état naturel, chaque né peut être un garçon ou une fille. Notons par

$$\begin{aligned} G : &= \text{l'événement ``garçon né''} \\ F : &= \text{l'événement `` fille née''} ; \end{aligned}$$

donc l'ensemble des scénarios (univers) sera :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{F, G\} \times \{F, G\} \times \{F, G\} \\ &= \{FFF, FFG, FGF, FGG, GFF, GFG, GGF, GGG\} \end{aligned}$$

Selon l'hypothèse : chacune des possibilités a la même probabilité de réalisation " $\frac{1}{8}$ " , ont peut déduire que " $p(G) = p(F) = \frac{1}{2}$ "

Calcul de Probabilité

Eévénements indépendants

•Réponse-suite

Pour répondre aux questions on va définir A et B par liste. Soient donc

$$\begin{aligned} A: &= \{FFG, FGF, FGG, GFF, GFG, GGF\} \\ B: &= \{FGG, GFG, GGF\} \end{aligned}$$

Remarquer que toutes les éventualités sont equiprobales
par conséquent ont peut utiliser la formule d'equiprobabilité.

1) $p(A) = \frac{\text{cardinal}(A)}{\text{cardinal}(\Omega)} = \frac{6}{8}$ et $p(B) = \frac{\text{cardinal}(B)}{\text{cardinal}(\Omega)} = \frac{3}{8}$

Pour répondre à la deuxième question, définissons $A \cap B$ par liste :

$$A \cap B = \{FGG, GFG, GGF\} = B$$

2) $p(A \cap B) = \frac{\text{cardinal}(A \cap B)}{\text{cardinal}(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0,375$

Calcul de Probabilité

Eévénements indépendants

•Réponse-noter bien

Les deux événements A et B ne sont pas indépendants

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} p(A \cap B) & \neq & p(A) \times p(B) \\ \frac{3}{8} & \neq & \frac{3}{8} \times \frac{6}{8} \end{array}$$

•Essayer de verifier cette indépendance en cas de la question 3)

Calcul de Probabilité

Eévénements indépendants

Propriété.2

Deux événements A et B sont indépendants ssi

- $\bar{A}$ et B sont indépendants
- A et $\bar{B}$ sont indépendants
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

•Lemme

Deux événements disjoints (incompatibles) avec probabilités non nulles tels qu ils sont differents de l' ensemble Ω, ne sont pas indépendants.

Variable aléatoire

Conception de base

En relation avec la conception de probabilité, il ya la conception de variable aléatoire. Cette variable aléatoire représente les valeurs (résultats) qu'on peut observé dans les phénomènes aléatoire, et qui dependent du hazard ; sur les quelles on peut établir une mésure de probabilité.

Définition

Une variable aléatoire est une réalisation d'une épreuve exprimée à partir des quantités mesurables d'une manière incertaine

Variable aléatoire

Conception de base

- le résultat d'un lancer d'un dé
- le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie
- le nombre de camions qui arrivent par heure au quai de chargement
- le nombre de clients qui sont en ligne pour être servis
- le prix d'une action boursière

Variable aléatoire

Généralité

Autrement dit : Etant donné $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé

Définition axiomatique

Une variable aléatoire X, est l' application mesurable définie para

$$\begin{array}{cccc} X & : \Omega & \longrightarrow & Support(X) \subseteq \mathbb{R} \\ & \omega_i & \longrightarrow & X(\omega_i) = x_i \end{array}$$

telle que

$$P(X(\omega_i) = x_i) = P(\omega_i)$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes

Définition

On dit que la variable X est discrète lorsque ses différentes valeurs possibles "x_i" sont en nombre fini (ou infini dénombrable) :

$$\begin{aligned} S = Support(X) &= \{x \in \mathbb{R} / \text{il existe } \omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\} \\ &= \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\} \end{aligned}$$

•Exemple

On jette un dé équilibré à six faces, et on observe les résultats. si le résultat de l'expérience est "$i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$", on veut rembourser " i DH". Parcontre si le résultat de l'exérience est "6", on veut réclamer "9 DH". La variable Gain (soit net soit brute) est une variable aléatoire discrète..

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes

•Exemple-suite

Soit X la variable aléatoire décrivant le Gain. Déterminons les valeur que peut prendre X (c.a.d le $Support(X)$)

Résultat du Dé	1	2	3	4	5	6
X = gain brute	1	2	3	4	5	-9
X = gain net	0	1	2	3	4	-10

•Noter bien

pour le cas du Gain net on a supposé que que l'abonnement est de "1 DH" $\longrightarrow$ Gain net $=$ Gain brute $- 1DH$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes

- Exemple-suite
  - X = gain brute

$$Support(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, -9\}$$

  - X = gain net

$$Support(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, -10\}$$

  - Probabilité du Gain brute

$$p(X = 3DH) = p(\text{avoir un } 3) = \frac{1}{6}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes $\Longrightarrow$ Loi de probabilité

Définition

On appelle loi (ou distribution) de probabilité d'une variable aléatoire X toute fonction qui fait associer a chacune des valeurs possibles de X la probabilité qui lui correspond

- Si on pose $p_i = p(X(\omega_i) = x_i)$ alors l'ensemble des couples "$(x_i, p_i);\ i = 1, 2, \ldots, n$" constitue la loi de probabilité de X
- On écrit $p_i = p(X = x_i)$
- On peut verifier facilement que $\sum_i p_i = 1$

La représentation graphique de cette v.a est donné para le diagramme en bâtons.

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes $\Longrightarrow$ Loi de probabilité

•Exemple

Considérer le cas de l'expérience aléatoire

$\lll$ le jet simultané de deux dés $\ggg$

•Exercice

Une enquête a montré que 5% des actions au sein de la bourse au Casablanca ont chuté de prix. Supposons qu' on prélève au hazard du marché deux actions. On désigne par X la variable aléatoire qui détermine le nombre des actions dont le prix est à la baisse.

- Représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X sachant que les prix de deux actions quelconques sont indépendants

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes $\Longrightarrow$ Loi de probabilité

• Réponse de l'exercice

$$
\begin{array}{cc|cc|cc}
 & & & H & \Longrightarrow & HH = H^{(1)} \cap H^{(2)} \\
 & & \nearrow & & & \\
 & H & \searrow & B & \Longrightarrow & HB = H^{(1)} \cap B^{(2)} \\
\nearrow & & & & & \\
\searrow & & & & & \\
 & B & \nearrow & H & \Longrightarrow & BH = B^{(1)} \cap H^{(2)} \\
 & & \searrow & & & \\
 & & & B & \Longrightarrow & BB = B^{(1)} \cap B^{(2)} \\
\hline
1^\circ \ \text{action}^{(1)} & & 2^\circ \ \text{action}^{(2)} & & = & \Omega
\end{array}
$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes $\Longrightarrow$ Loi de probabilité

•Réponse-suite

Dans l'arbre précédent on indique par

$$\begin{aligned} H : &\quad = \quad \text{l'événement} \lll \text{avoir une hausse} \ggg \\ B : &\quad = \quad \text{l'événement} \lll \text{avoir une baisse} \ggg \end{aligned}$$

Donc l'ensemble d'échantillonnage (l'univers) est donné par

$$\Omega = \{HH, HB, BH, BB\}$$

- Pour répondre à la question, premièrement ont cherche le support de X (l 'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire). En effet

$$\begin{array}{cccccc} Support(X) = X(\Omega) & = & \{0, & 1, & 2\} \\ & & \downarrow & \Downarrow & \downarrow \\ & & \{HH, & \overbrace{HB, BH}, & BB\} \end{array}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes $\Longrightarrow$ Loi de probabilité

- Réponse-suite
  - Loi de $X \leftarrow$ détérminer les couples "(x_i, p_i); $i = 1, 2, 3$" :

TABLE: Loi de Probabilité de X="nombre de baisses"

	x_1	x_2	x_3
$X = x_i$	0	1	2
$p_i = p(X = x_i)$	$p(HH)$	$p(\{HB, BH\})$	$p(BB)$

Reste donc à calculer les probabilités $p(HH)$, $p(\{HB, BH\})$ et $p(BB)$. En effet, selon l'hypothèse "les prix de deux actions quelconques sont indépendants", on aura

$$\begin{aligned} p(HH) &= p(H) \times p(H), \\ p(BB) &= p(B) \times p(B) \quad \text{et} \\ p(HB) &= p(H) \times p(B) \end{aligned}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes $\Longrightarrow$ Loi de probabilité

•Réponse-suite

Note bien que les événements HB et BH sont incompatibles, alors

$$p(\{HB, BH\}) = p(HB) + p(BH) = p(H)p(B) + p(B)p(H)$$

Maintenant, on sait, d'après l'énoncé de l'exercice, que "$P(B) = 5\%$" ce qui implique que "$P(H) = 1 - P(B) = 95\%$".
D'où on a

TABLE: Loi de Probabilité de X="nombre de baisses"

$X = x_i$	0	1	2
$p_i = p(X = x_i)$	$p(HH)$	$p(\{HB, BH\})$	$p(BB)$
	$(0.95)^2$	$2 \times (0.05)(0.95)$	$(0.95)^2$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Caractéristiques des lois de probabilité

•Fonction de répartition

Définition

Etant donnée une variable aléatoire X, On appelle fonction de répartition de X, l'application F définie par

$$\begin{array}{rrcl} F & : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & F(x) = P[X \leq x] \end{array}$$

□Exemple d'application

En finance, la fonction de répartition est utilisée pour définir la mesure du risque populair, appelé "valeur en risque-VaR". Les banque doivent avoir un capital suffisant pour enfrenter les pêrtes potentielles en portefeuilles....

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Caractéristiques des lois de probabilité

... Pour évaluer la croissance du capital exigé, le $VaR(99\%)$ est souvent utilisé. Elle est définie comme le nombre " x " tel que

$$p(X \geq x) = 1 - F(x) = 0.99$$

Où la variable X indique le revenu de portefeuille (l'actif) dans une période donné du temps.

•Remarque

$$F(x) = p(x_1) + p(x_2) + \ldots\ldots + p(x_i),$$

où "$x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots \leq x_i \leq x$".
Si "$p(X = x_j),\ j = 1, 2, \ldots, i$", alors

$$F(x) = p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_i$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Caractéristiques des lois de probabilité

Etant donné $x \in \mathbb{R}$, alors $F(x)$ est l'accumulation des probabilités en les valeurs possibles de la variable aléatoire X inférieurs à x (en les points de X situés à gauche de x)

♦Bien comprendre

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
-\infty & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & \boxed{x} & - & \bullet & - & x_{i-1} & - & x_i & - & \boxed{y} & - & x_{i+1} & - & \bullet & - & x_n & \longrightarrow & +\infty \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow & & & & \Downarrow & & \\
 & & p_1 & & p_2 & & p_3 & &] & & & & p_{i-1} & & p_i & &] & & p_{i+1} & & & & p_n & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
F(x) = P(X \leq x) &= p_1 - p_2 + p_3 \\
F(y) = P(X \leq y) &= p_1 - p_2 + p_3 + \ldots + p_{i-1} + p_i
\end{aligned}$$

et $$P(x \leq X \leq y) = F(y) - F(x) = \ldots + p_{i-1} + p_i$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Lois de probabilité

•Exercice

On consider un jeu simplifié de loto, avec 10 numéros. Le jeu consiste a choisir 3 numero parmi 10. Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre des numéros corrects du Ticket.

1. Definir la loi de probabilité de X
2. Quelle est la probabilité de rater le prix du jeu, en supposant que pour gagner on doit avoir les 3 nombres corrects

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Lois de probabilité

•Solution

Il s'agit d'une expérience aléatoire que consiste à choisir 3 numéros entre 10. Evidemment les nombres possibles son

$$\text{“}\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\text{”}.$$

Noter bien on n' a pas besoin toujours, comme Dans ce cas là, de définir para liste l'ensemble des scénarios Ω ; il suffit de connaitre son cardinal. En effet, Le nombre possible de choisir 3 éléments entre ces 10, indiqués avant, est donné par

$$\text{Cardinal}(\Omega) = |\Omega| = \mathbb{C}_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Lois de probabilité

• Solution-suite

A fin de clarification, nous choisissons les trois numéros gagnants suivants (le choix est arbitraire)

TABLE: Nombres gagnants sans considération de leur ordre

1	3	6

Etant donnée X la variable aléatoire indiquant le nombre des numero correct du Ticket, les valeurs possibles qui peut prendre cette variable est donnée para

$$Support(X) = \{0, 1, 2, 3\}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Lois de probabilité

•Solution

1. Loi de probabilité de X

X	0	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$

• Calcul des probabilités

Pour ne pas avoir aucun nombre entres les trois gagnants le choix est fait parmi $\{0, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$. Donc

$$P(X = 0) = P(\text{choisir 3 parmi 7}) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\mathbb{C}_7^3}{\mathbb{C}_{10}^3}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Lois de probabilité

•Solution-suite

Pour avoir avoir un nombre entre les trois gagnants le choix est fait de la manière suivante :

1. choisir 1 numero entre 3 : C_3^1
2. choisir les deux autres entre les 7 restantes : C_7^2

Ainsi, on aura

$$P(X=1) = P(\text{choisir 1 entre 3 et 2 entre 7}) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{C_3^1.C_2^7}{C_{10}^3}$$

De la même manière on calcul

$$P(X=2) = P(\text{choisir 2 entre 3 et 1 entre 7}) = \frac{C_3^2.C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{7.C_3^2}{C_{10}^3}$$

$$P(X=3) = P(\text{choisir 3 entre 3 }) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{C_{10}^3}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Lois de probabilité

• Solution-suite

2. La probabilité de rater le prix est donnée para

$$
\begin{aligned}
P(X<3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \\
&= \frac{C_7^3}{C_{10}^3}+\frac{7.C_3^2}{C_{10}^3}+\frac{1}{C_{10}^3}
\end{aligned}
$$

Je vous laisse à vous de faire les calcul.

Fonction de Répartition

Propriétés

- F est une fonction positive croissante :
$$\text{si} \quad x_i \leq x_j \text{ alors } \quad F(x_i) \leq F(x_j)$$
- F est une fonction continue à droite :
$$\lim_{x \to a^+} = F(a)$$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P[x_1 \leq X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$
- $P[X \geq x] = 1 - P[X \leq x] = 1 - F(x)$

$F(x_i)$ est définie sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Donc F est une fonction en Escalier

Fonction de Répartition

•Exercice

On jette successivement 2 pièce. Supposons qu'un joueur mise "1 *mrd*" DH (un milliard de dirhams) au joue suivant basé sur cette expérience aléatoire. A chaque fois que "Face" est menée sa fortune double mais si "pile" il perd tout.

1. Quelle est la variable aléatoire X donnant la fortune du joueur à la fin du jeu ?
2. Déterminer la fonction de distribution (de répartition) de X

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Fonction de répartition

•Réponse

En lançant successivement deux pièces de monnaies, l'ensemble des scénarios (l'ensemble des réalisations) sera donc donné par :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{P, F\} \times \{P, F\} \\ &= \{PP, PF, FP, FF\}; \end{aligned}$$

où on a

$$\begin{aligned} P: &= \text{l'événement} \lll \text{mener pile} \ggg \\ F: &= \text{l'événement} \lll \text{mener face} \ggg \end{aligned}$$

Soit X la variable aléatoire donnant la fortune du joueur à la fin de jeu

1. le support de cette variable est donné par

$$Support(X) = X(\Omega) = \{X(PP), X(PF), X(FP), X(FF)\}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Fonction de répartition

• Réponse-suite

1. Selon l'énnoncé de l'exercice on aura

$$X(PP) = X(PF) = X(FP) = 0 \text{ et } X(FF) = 2\times 2 \; mrd = 4 \; mrd$$

$$Support(X) = X(\Omega) = \begin{array}{c} \{ \; 0, \qquad 4 \} \\ \Downarrow \qquad \downarrow \\ \{\overbrace{PP, PF, FP}, FF\} \end{array}$$

• La variable X ne peut prendre que deux valeurs :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0; \text{ si on obtient au moins une pile} \\ x_2 &= 4; \text{ si on obtient deux faces} \end{aligned}$$

Variable aléatoire

Variables aléatoires discretes : Fonction de réoartition

•Réponse-suite

2 Pour détérminer la fonction de répartition "F" de X il est nécessaire connaitre sa loi de distribution ; qu'on peut détérminer facilement comme suit :

TABLE: loi de la fortune du joueur "X"

$X = x_i$	0	4
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ainsi, la fonction de répartiton est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 0; \\ \frac{3}{4} & si \ 0 \leq x < 4; \\ 1 & si \ 4 \leq x \end{cases}$$

Variable aléatoire discrète

Quelques tendance d'importance

- Mesures de positions Les mesures de position tentent à résumer et à synthétiser l'ensemble des données à l'aide d'une valeur numérique.

M. position centrale	**M. position non central**
–Moyen	
–Mode	les Quantiles
–Mediane	

- Esperance d'une variable aléatoire discrète $\longrightarrow$ Moyen

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i}^{n} p_i x_i;$$

étant X la variable aléatoire définie para la loi de probabilité suivante : $(x_i, P(X = x_i) = p_i), \; i = 1, 2 \ldots, n$

Variable aléatoire discrète

Espérence mathématique

• Définition

On appelle Espérence mathématique d' une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs "$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$", telles que "$P(X = x_i) = p_i; \; i = 1, 2, \ldots, n$", la quantité :

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i}^{n} p_i x_i$$

Variable aléatoire discrète

Quelques tendance d'importance

- Mesures de dispersion Les mesures de dispersion nous indiquent la déviation des données par rapport à position central (valeur de référence). De cette façon ces mesures de centralisation peuvent être considérées représentatives ou pas, en fonction des dispersions obtenues

M. Dispersion	**Formule**
–Rang	$max_{i=1,\dots,n}\{x_i\} - \min_{i=1,\dots,n}\{x_i\}$
–Rang interquartile	$Q_3 - Q_1$
–variance	$E[(X-\mu_X)^2]$

- Variance d'une variable aléatoire discrète

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \sum_i^n p_i x_i^2 - \mu_X^2;$$

Variable aléatoire discrète

Variance mathématique

•Définition

On appelle variance mathématique d'une variable aléatoire discrète de loi de probabilité "$(x_i, p_i), \ i = 1, 2 \ldots, n$", la quantité définie par :

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_i^n p_i x_i^2 - \mu_X^2;$$

•Remarque :Définition

La quantité "$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$" représente l'écart type de la variable aléatoire X .

Variable aléatoire discrète

Quelques tendance d'importance

• Quelques propriétés

- On a la relation : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- Si X est une variable aléatoire, alors pour tout "$a,\ b \in \mathbb{R}$" ona

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

L'espérance $E(.)$ est un opérateur linéaire alors que la variance $V(.)$ est una opérateur quadratique

Variable aléatoire discrète

Quelques tendance d'importance

• **Exemple**

Une femme d'affaire à deux possibilités d'investissement : le projet A et le projet B. Si elle investit en A ella une chance de 20% de perdre 10.000 DH , une chance de 70% de conserver son argent et 10% de gagner 200.000 DH. Alors que si elle investit en projet B, elle aura une chance de 15% de perdre 10.000 DH, une chance de 25% pour conserver son argent et une chance de 60% de gagner 50.000 DH. En quelle projet devrait- elle investir ?

(Allusion) Calculer les espérances et les variances en gains des deux projets A et B et faire une comparaison. Que peut on conclure si on compare les probabilités ?

Variable aléatoire discrète

Quelques tendance d'importance

•Réponse-indication

Soient les variables aléatoires

$$X_A := \lll \text{ le gain en 1000 DH en projet "A" } \ggg$$
$$X_B := \lll \text{ le gain en 1000 DH en projet "B" } \ggg$$

Détérminos d'abord la loi de ces deux variables. En effet

• Loi de "X_A"

	Perdre de largent	Conserver l'argent	Gagner de l'argent
X_A	-10	0	200
$P_i = P(X_A = x_i)$	0.20	0.70	0.10

Variable aléatoire discrète

Quelques tendance d'importance

• Réponse-indication

Pour calculer l'espérance "$E(X_A)$" et la variance "$V(X_A)$" de la variables aléatoire "X_A" présentons le tableux suivant :

TABLE: Calcul de la moyenne $E(X_A)$ et de la variance $V(X_A)$

X_A	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
-10	0.20	-2	20
0	0.70	0	0
200	0.10	20	4000
	$\sum_i p_i$=1	$\sum_i x_i p_i$=18	$\sum_i x_i^2 p_i$=4020

Par suite ona

- $E(X_A) = \sum_i x_i p_i = 18$
- $V(X_A) = \sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2 = 4020 - 324 = 3696$

Variable aléatoire discrète

Quelques tendance d'importance

•Interprétation

Le gain espéré en projet “A” est de “18.000 DH” et le risque est de “3696.000 DH”

- Faites la mme chose en cas de projet “B” et comparer les résultats

Loi de probabilité à deux dimensions
Introduction

Généralement, dans une étude statistique, la simple connaissance des valeurs qui peut prendre une variable aléatoire, séparement, n'est pas suffisante. On a besoin de connaitre son comportement en conjonction avec d'autre variables d'inérêt.
Citons comme exemple

- les dépenses publicitaires d'une agence de voyages et le nombre de passagers qui préfèrent voyager avec cette agence
- Les salaire et les dépense familiaires
- Le PIB (le produit intérieur brute) et la consomation

Loi de probabilité à deux dimensions
Généralité

•Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'ensemble des événements $\Omega \times \Omega$. Si a chacune des valeurs possibles du couple (X, Y), on associe la probabilité de l'événement correspondant on obtient la loi conjointe des variables aléatoires Xet Y ; dite loi de la variable aléatoires a deux dimensions $Z = (X, Y)$.

Loi de probabilité à deux dimensions : Cas discret

•Définition

Considérer la varibales aléatoire bivariée $Z = (X, Y)$, dont le $Support(Z) = \{(x_i, y_j); i = 1, \dots, n\ j = 1, \dots, m\}$ telleque $P_Z(x_i, y_j) = p_{ij}$ alors les distributions marginales de X et Y sont

- Marginale de X $\longrightarrow (x_i, p_{i\bullet})$ avec $p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$
- Marginale de Y $\longrightarrow (y_i, p_{\bullet j})$ avec $p_{\bullet i} = \sum_i p_{ij}$

Il vient que

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = \sum_i p_{i\bullet} = \sum_j p_{\bullet j} = 1$$

Loi de probabilité à deux dimensions :
Cas discret : Mesures de tendance centrale et de dispérsion

- Espérance Mathématique :
  $E(Z) = E(X,Y) \longrightarrow (E[X], E[Y]) = (\sum_i x_i p_{i\bullet}, \sum_j y_j p_{\bullet j})$
- Covariance :
  $Cov(X,Y) =$
  $\sum_{i,j} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) p_{ij}, \; i = 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots$

Loi de probabilité à deux dimensions : Cas discret

•Exemple

On lance successivement trois fois une pièce de monnaie, non truquée. soient X et Y deux variables aléatoires telles que

$$X := \text{"nombre des faces obtenues"}$$
$$Y := \text{"nombre de lancements avant d'obtenir la premère face"}$$

1. Trouver la distribution conjointe de (X, Y)
2. Calculer les distribution marginal de X et de Y
3. Calculer $P[X \leq 2, Y = 1]$, $P[X \leq 2, Y \leq 1]$, $P[X \leq 2 \text{ ou bien } Y \leq 1]$

Loi de probabilité à deux dimensions : Cas discret

•Solution

Définons premièrement l'ensemble des scénarios de cette expérience aléatoire :

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$

Les valeures possibles qui peuvent prendre les deux variables X et Y sont données par

$$\begin{aligned} Support(X) &= \{0, 1, 2, 3\} \\ Support(Y) &= \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Loi de probabilité à deux dimensions : Cas discret

•Solution-suite

1. Distribution conjointe de $(X; Y)$:
$Support(X, Y) =$
$\{(0,3),(1,2),(1,1),(2,1),(1,0),(2,0),(3,0)\}$

$X \backslash Y$	0	1	2	3	X
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$P_{1\bullet} = \frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$P_{2\bullet} = \frac{3}{8}$
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$P_{3\bullet} = \frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$P_{4\bullet} = \frac{1}{8}$
Y	$P_{\bullet 1} = \frac{4}{8}$	$P_{\bullet 2} = \frac{2}{8}$	$P_{\bullet 3} = \frac{1}{8}$	$P_{\bullet 4} = \frac{1}{8}$	1

TABLE: table de contengence : table de double entrée

Loi de probabilité à deux dimensions : Cas discret

•Solution-suite

2. Lois marginales de X et de Y

- Loi marginale de Y

$$P_{\bullet 1} = P(Y=0) = \frac{1}{2}; \quad P_{\bullet 2} = P(Y=1) = \frac{1}{4}$$
$$P_{\bullet 3} = P(Y=2) = \frac{1}{8}; \quad P_{\bullet 4} = P(Y=3) = \frac{1}{8}$$

- Loi marginale de X

$$P_{1\bullet} = P(X=0) = \frac{1}{8}; \quad P_{2\bullet} = P(X=1) = \frac{3}{8}$$
$$P_{3\bullet} = P(X=2) = \frac{3}{8}; \quad P_{4\bullet} = P(X=3) = \frac{1}{8}$$

Loi de probabilité à deux dimensions : Cas discret

•Solution-suite

3 Calcul des probabilités

- $P[X \leq 2, Y = 1] = \sum_{x_i \leq 2} P(X = x_i, Y = 1)$

$$= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1)$$
$$= 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

- $P[X \leq 2, Y \leq 1] = \sum_{x_i \leq 2} \sum_{y_j \leq 1} P[X = x_i, Y = y_j]$

$$= \sum_{x_i \leq 2} P(X = x_i, Y = 0) + \sum_{x_i \leq 2} P(X = x_i, Y = 1)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

Loi de probabilité à deux dimensions : Cas discret

•Solution-suite

3 Calcul des probabilités

- $P[X \leq 2 \text{ ou } \ Y \leq 1] = P(X \leq 2) + P(Y \leq 1) - P[X \leq 2, Y \leq 1]$

avec

$$P(X \leq 2) = \sum_{x_i \leq 2} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= P_{1\bullet} + P_{2\bullet} + P_{3\bullet} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(Y \leq 1) = \sum_{y_j \leq 1} P(Y = y_j) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$$

$$= P_{\bullet 1} + P_{\bullet 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8}$$

Distribution conditionnelle X/Y :Notion d'indépendance

- Notion d'indépendance :Définition

On dit que deux variable aléatoires X et Y sont independantes (au sense statistique), si la fonction de distribution conjointe est le produit des fonctions de distributions marginales.*c.a.d*

$$P[X \leq x, Y \leq y] = P[X \leq x]P[Y \leq y]$$

- Distribution de probabilité conditionnelle :Définition

Etant données deux variables aléatoires X et Y, soit $y \in \mathbb{R}$ telle que l'événement A défini par $\{Y \leq y\}$ à une probabilité non nulle, alors la distribution de X conditionnée par A est définie comme :

$$P[X \leq x/Y \leq y] = \frac{P[X \leq x, Y \leq y]}{P(Y \leq y)}$$

Distribution conditionnelle X/Y

$\longrightarrow$ On lit "probabilité de $\{X \leq x\}$ sachant $\{Y \leq y\}$

- Similitude avec événements

Si on note par B l'événement $\{Y \leq y\}$ on aura les relations suivantes :

$$P[X \leq x, Y \leq y] = P[B \cap A]$$

et

$$P[X \leq x/Y \leq y] = P(B/A)$$

- Noter Bien

Deux variable aléatoires X et Y sont dite independantes si pour toute $x \in \mathbb{R}$ on a

$$P[X \leq x/Y \leq y] = P(X \leq x), \ \forall y \in \mathbb{R} \text{ telle que} P(Y \leq y) \neq 0$$

Distribution conditionnelleX/Y
Notion d'indépendance

•Exemple

Remarquer que dans l'exemple précedent les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, pour $Y=0$ on a

$$P[X/Y=0] \neq P(X)$$

En variant les valeur qui peut prendre Y on aura pour tout "$i=1,2,3,4$"

$$P_{i/j}=P(X=x_i/Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} \neq P_{i\bullet}=P(X=x_i)$$