Calcul de probabilité

Cours LF -S2-Partie II

Prof. El kettani Moummou

Faculté SJES de Tétouan
Université Adbel Malik Assaâdi

22 avril 2021

Variables aléatoires Continues et lois de probabilités

Chapitre V

•Loi de distribution Normale

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Variable aléatoire continue

Définition1

On dit qu' une variable aléatoire X est continue s'elle exite une fonction $f(x)$ continue (sauf au plus dans un ensemble fini ou dénombrable), positive telque

$$P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Variable aléatoire continue

Définition2
[Remarque]

Une variable aléatoire continue X est donc une variable qui prend des valeurs dans un interval $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec une densité de probabilité $f(x)$ telque :

- $f(x) \geq 0$
  et
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Variable aléatoire continue

Fonction de Répartition (de distribution)

La fonction de répartition définie para

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

est reliée à la fonction de densité par l'expression

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dt}$$

Variable aléatoire continue

Apartir de cette fonction densité en calcul la probabilité d' un événement relatif à la variable aléatoire de la forme suivante :

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Noter bien

La valeur en un point x de la fonction densité n'est pas la probabilité en ce point :

$$P[X = x] = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$$

Variable aléatoire continue

Cas particulier

Loi Normale

Définition On dit qu'une variable aléatoire X est normale ou suit une loi normal si sa densité de probabilité est définie para :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

μ et σ^2 indiquent respectivement l'Espérance et la Variance de X.

- On note la distribution de X par $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Normal centré réduite

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors la variable aléatoire

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

s'appelle Loi normale centré réduite et se note para $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On a donc

- Espérance$\longrightarrow E[Z] = 0$
- Variance $\longrightarrow V[Z] = 1.$

Remarque Une loi normal est totalement définie par ces deux paramètres, la moyenne μ et l'ecart type σ

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- Caracteristiques
  - Ses propriétés lui permettent d'être appliqué dans un grand nombre de situations, où il est nécessaire faire une inférence apartir d'un echantillon.
  - La distribution normale s'ajuste quasiment aux distributions de fréquences reèlles observées dans plusieurs phénomènes (poids, taille, coefficient intelectuel, processus physiques ..etc)

Approximation de la binomiale à la Normal

théorème des mathématiciens DeMoivre et Laplace

Lorsque "n" est large/ $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ alors

$$\mathcal{B}(n,p) \sim \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$$

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- Exercice

On design para X la variable qui indique le nombre de piles lors de jeter 100 fois à l'air une pièce de monnaie. Calculer $P[X \geq 60]$ et $P[45 \leq X \leq 60]$

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- Réponse

Remarquons que $X \sim \mathcal{B}(n = 100, p = 0.5)$, en plus on a $np \geq 5$ alors on peut approximer la loi de X para une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 50, \sigma^2 = 25)$. Par suite

$$\begin{aligned} P(45 \leq X \leq 60) &= P(\tfrac{45-50}{5} \leq \tfrac{X-50}{5} \leq \tfrac{60-50}{5}) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) \end{aligned}$$

avec $Z = \frac{X-50}{5} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Pour calculer $P(Z \leq -1)$ on utilise la relation

$$P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$$

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

•Exemple

Un distributeur d'essence arrondit les montants à 5 centimes près. Si 1200 automobilistes utilisent ce distributeur, quelle est la probabilité que le gain dû aux arrondis soit supérieur à un franc ?. Considérer que les arrondits suivent une loi uniforme sur l'intervalle "$[a, b] = [-2.5, 2.5]$"

•Réponse

Soit "X" la variable aléatoire indiquant les arrondis. La distribution de probabilité de X est donnée para (d.uniforme) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b] \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

•Réponse-suite

On peut verifier facilement que la distribution de X a une moyenne nulle et une variance de $25/12$. En effet

$$E(X) = \int_{-2.5}^{2.5} xf(x)dx = \int_{-2.5}^{2.5} \frac{x}{5} dx = \frac{x^2}{10}]_{-2.5}^{2.5} = \frac{1}{10}[(2.5)^2 - (-2.5)^2] = 0$$

$$V[X] = E[X^2] - E^2(X) = \int_{-2.5}^{2.5} x^2 f(x)dx = \int_{-2.5}^{2.5} \frac{x^2}{5} = \frac{1}{15}x^3]_{-2.5}^{2.5}$$

$$= \frac{1}{15}[(2.5)^3 - (-2.5)^3] = \frac{25}{12}$$

Par conséquent, si on considère les $1200(\geq n = 30)$ arrondis ,

"$x_1, x_2, \ldots, x_{1200}$" , la somme "$\sum_{i}^{1200} x_i$" suit approximativement une

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

•Réponse-suite

loi normale avec moyenne "$\mu = 0$" et variance "$\sigma^2 = 2500$"

On a alors le gain dû aux arrondis $G = \sum_{i}^{n=1200} x_i$ est tel que

$$E(G) = E(\sum_{i}^{1200} x_i) = 1200 E(x_i) = 0$$

$$V(G) = V(\sum_{i}^{1200} x_i) = 1200 V(x_i) = 2500$$

•Propriété : si deux Variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors on a $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

•Réponse-suite

La question nous demande de calculer $P(G \geq 1)$ soit donc

$$G = \sum_{i}^{n=1200} x_i \geq 1(franc)$$

$$\Leftrightarrow \quad G \geq 100(centimes)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{G-0}{\sqrt{2500}} \geq \frac{100-0}{50} = 2$$

La nouvelle variable " $Z = \frac{G-0}{\sqrt{2500}}$ " centrée réduite suit une loi normale "$\mathcal{N}(0,1)$". Par suite

$$P(G \geq 1) = P(Z \geq 2) = 0.0228 \longleftarrow \text{voir la table statistique}$$

Variable aléatoire continue

Loi Normale $\backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Exemple

Supposons que les taille des jeunes hommes adultes soient normalement distribuées, avec une moyenne "$1,7$" *et ecart* "0.3"*. Si on choisit au hazard un individu de cette population.*

a) *Quelle est la probabilité pour que sa taille soit inférieur à* "$1,5$" *mettre ?*

b) *Quelle est la probabilité pour qu'elle soit entre* "1.66" *et* "$1,74$" *?*

c) *Quelle taille doit il avoir pour être parmi les* "5%" *les plus grands ?*