Calcul de probabilité

Cours LF -S2-Partie II

Prof. El kettani Moummou

Faculté SJES de Tétouan
Université Adbel Malik Assaâdi

22 avril 2021

Lois de Probabilités Discrètes

Chapitre IV

- Modèle de Bernoulli
- Modèle Binomial
- Modèle de Poisson

1. Lois de Probabilités Discrètes
   - Modèle de Bernoulli
   - Modèle Binomial
   - Modèle de Poisson

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Bernoulli

- Epreuve de Bernoulli

Ce modèle s'applique dans des situations où l'expérience produit seulement 2 résultats incompatibles. Ceux ci s'appellent souvent $A =$ Succès, $B =$ Complementaire (A) $=$ Echec.

On définit la variable aléatoire discrète X, qui représente le résultat de cette expérience de la manière suivante

$$\begin{aligned} X(B) &= 0, \text{ s' il ya Echec avec probabilité } ``q" \\ X(A) &= 1, \text{ s' il ya Succès avec probabilité } ``p"' \; (``p + q = 1") \end{aligned}$$

•Exemple

Lancer un dé non truqué et considére l'événement succès $A = \{3\}$ et l'événement echec $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

Lois de Probabilités Discrètes
Modèle de Bernoulli

Sa fonction masse de probabilité est

TABLE: Loi de probabilité de Bernoulli

x_i	0	1
p_i	1-p	p

Definition :

On dit donc que la variable aléatoire "X=résultat" suit une distribution de Bernoulli de paramètre "p"

et se note comme $X \sim \mathcal{B}(p)$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Bernoulli :Fonction de de répartition

La fonction de répartition d'une loi de Bernoulli est donnée par

TABLE: Fonction de répartition d'une variable aléatoire X de Bernoulli

$F(x) = P(X \leq x)$	$x \in \mathbb{R}$
0	si $x < 0$
q=1-p	si $0 \leq x < 1$
1	si $1 \leq x$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Bernoulli :Caractéristiques

- Espérance

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i p_i \\ &= x_1 p_1 + x_2 p_2 \\ &= 0.(1-p) + 1.p = p \end{aligned}$$

- Variance

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

où on a

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = 0^2.(1-p) + 1^2.p = p$$

$$[E(X)]^2 = p^2$$

par suite

$$V(X) = p - p^2 = p(1.p) = pq$$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Bernoulli :Caractéristiques

•Illustration

Considérons l'exemple antérieur d'un lancé d'un dé, non truqué, où

$$\begin{aligned} A &= \{3\} \longrightarrow \text{Succès} \\ B &= \{1, 2, 4, 5, 6\} \longrightarrow \text{Echec} \end{aligned}$$

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de succès reliés à cette expérience. Il vient que

$$Support(X) = \{0, 1\}, \text{ où } X(A) = 1 \text{ et } X(B) = 0$$

Par conséquent notre variable aléatoire X suit une loi bernoulli de paramètre "$p = P(X = 1)$" avec "$P(X = 1) = P(A) = \frac{1}{6}$"

♦ On note $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{6})$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Binomial

Considérer une expérience qui se répéte "n" fois, d'une forme identique et indépendante ; où les résultats de chaque réalisation se classifient en deux catégories Succès et Echec (comme dans le cas de Bernoulli)

•Définition

La variable aléatoire qui compte le nombre de succès en "n" réalisations suit une distribution Binomiale de paramètres "n" et "p=la probabilité d'avoir un succès" .

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Binomial : Loi de distribution

Les valeurs possibles qui peut prendre une variable aléatoire X de type précédent, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, sont données par :

$$Support(X) = \{0, 1, 2 \ldots, n\}$$

La fonction masse de probabilité est définie par

$$p_k = P(X = k) = \complement_n^k p^k (1-p)^{n-k}; \ \forall k \in Support(X).$$

•Observation

Dans quelques ouvrage on note par

$\binom{n}{k} = \complement_n^k$: la combinaison de k éléments parmi n

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Binomial : Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une loi de Bernoulli est donnée par

TABLE: Fonction de répartition d'une variable aléatoire X Binomiale

$F(x) = P(X \leq x)$	$x \in \mathbb{R}$
0	si $x < 0$
$\sum_{k=0}^{[x]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	si $0 \leq x < n$
1	si $n \leq x$

On indique par $[x]$ la partie entière de "x"

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Binomial : Caractéristiques

- Espérance

$$E[X] = np$$

- Variance

$$V[X] = np(1-p)$$

•Noter bien

Une variable aléatoire X, suivant une loi binomial $\mathcal{B}(n,p)$ peut s'écrire sous forme

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

avec "$X_j,\ j = 1, 2 \ldots, n$" une suite des variables independantes et identiquement distribuées, dont la distribution est de Bernoulli.
C.a.d $X_j \sim \mathcal{B}(p);\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Binomial :

■Exemple

Une companie d'assurance découvre que 5% d'une population a un type d'accident chaque année. Si on séléctionne au hazard 8 assurés de cette population, quelle est la probabilité pour qu'il n'aura pas plus de 2 personnes avec ce type d'accident ?

•Solution

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre des assurés, parmi les 8 séléctionnés, qui ont eu un type d'accident. Puisque le nombre des assurés qui peuvent avoir une accident varie de "0" à "8".

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Binomial :

★Explication

0 :=ça veut dire ≪ aucun assuré a eu un accident≫ et

8 :=ça veut dire ≪ tous les assurés séléctionnés ont eu un type d'accident≫

Donc les valeur possible qui peut prendre X sont données para

$$Support(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Si on prend comme

Succès := l'événement ≪ avoir eu un type d'accident≫

alors on aura

$$P(\text{Succès}) = 5\% = 0.05$$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Binomial :

•Solution-suite

Par suite X suit une loi binomial de paramètres "$n = 8$" et "$p = 0.05$" : $X \sim \mathcal{B}(n = 8, p = 0.05)$.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= \sum_{k=1}^{2} \complement_8^k p^k (1-p)^{8-k} \\
&= \complement_8^0 (0.05)^0 (0.95)^8 + \complement_8^1 (0.05)^1 (0.95)^7 + \complement_8^2 (0.05)^2 (0.95)^6 \\
&= 0.6634 + 0.2793 + 0.0372 = 0.9799
\end{aligned}
$$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle Binomial :

★Exemple

Supposer que le "70%" des résidents d'une ville ont internet à la maison. Si on chosit 10 résidents d'une manière aléatoire, quelle est la probabilité pour que

1. *6 aient internet à la maison ?*
2. *au plus 2 aient internet à la maison ?*

- Relation utile

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$(p = 70\%)$
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$(p = 30\%)$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle Binomial :

•Solution Prenons comme succès l'événement ⋘ avoir internet ⋙. Selon l'énnoncé on a $n = 10$ et $P(\text{succès}) = 0.7 = p$

Soit X la variable aléatoire idiquant le nombre de personnes, parmi les 10, ayant internet àla maison ; on les choisissant un à un d'une manière séparable et indépendante. Alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

1

$$\begin{aligned} P(X = 6) &= C_{10}^{6} p^6 (1-p)^4 = \frac{10.9.8}{4.3.2}(0.7)^6(0.30)^4 \\ &= 30(0.7)^6(0.30)^4 \\ &= 0.0285 \end{aligned}$$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle Binomial :

- Solution-suite

2

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= \sum_{x_i \leq 2} P(X = x_i) \\
&= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= C_{10}^{0}(0.7)^{0}(0.3)^{10} + C_{10}^{1}(0.7)^{1}(0.3)^{9} + C_{10}^{2}(0.7)^{2}(0.3)^{8} \\
&= (0.3)^{10} + 10(0.7)^{1}(0.3)^{9} + 45(0.7)^{2}(0.3)^{8}
\end{aligned}
$$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une distribution de poisson de paramètre λ (positif), si pour $\forall k \in \mathbb{N}$ on a

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- $k=$ le nombre de fois de réalisation de l'événement en question
- $\lambda=$ le nombre de réalisation par unité de temps ou d'espace
- $e = 2,71828$ la base du logarithme népérien

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson

- Usage : La loi de Poisson concerne la modélisation du nombre de fois qu 'un événement donné se produit dans un intervalle du temps, une longeur ou un espace fixe. On peut également l'utilisé pour la modélisation du nombre de réalisations d'un événement avec une faible probabilité

Exemples d'applications

- Modéliser le flou des ordres d'achats et de ventes des marchés financières (en théorie de microstructure)
- Modéliser l'arrivée des clients par heure
- Modéliser le nombre des accidents industrielle par mois(en Assurance)..etc

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson :$\mathcal{P}(\lambda)$

♦Noter bien

À l'application de la loi de poisson sont necessaires les hypothèses suivantes :

H_1- La probabilité de réalisation de l'événement est constante pour deux intervalles de temps quelconques

H_2- La réalisation de l'événement est independante de lintervalle du temps choisi

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson :Caractéristiques

- Espérance

$$E[X] = \lambda$$

- Variance

$$V[X] = \lambda$$

•Remarque

Le paramètre de la loi de poisson a une double signification, la moyenne et la variance (dispérsion)

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson

•Exemple

La simple observation des 80 dernières heures a montré que 800 clients sont entrés à une entreprise comerciale. Supposons que vous soyez intéressé à la probabilité qu'exactement 5 clients arrivent au cours de la prochaine heure.

•Solution

Soit A l'événement $\lll$ arrivé d'un client$\ggg$, alors on est intéressé au nombre de fois que cet événement se réalise pendant un intervalle de temps donné ; précisément en une heure. Par conséquent, la variable aléatoire-indiquons par X cette variable- qui représente ce phénomène suit une loi de poisson de paramètre "λ" à détérminer. Le paramètre λ, selon la définition, est le nombre de réalisations par unité de temps.

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson

•Solution-suite

D'après l'énnonce de l'éxercice, il y avait 800 clients en 80 heures, ainsi que pour une heure il y aurait "$\lambda = \frac{800}{80} = 10$" clients (en utilisant la regle de trois). Par conséquent, lal probabilité d'avoir exactement 5 clients pendant la prochaine heure est

$$P(X = 5) = \frac{10^5}{5!}e^{-10}$$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson$\sim$ modèle Binomial

•Noter bien

La distribution de Poisson est utilisée d une manière commune comme approximation a la binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque "n" est suffisamment large et "p" est proche de "0". Dans ce cas on aura

$$\mathcal{B}(n,p) \sim \mathcal{P}(\lambda = np)$$

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson$\sim$ modèle Binomial

•Exemple

Mme Bergen est un cadre à la “Coast Bank and Trust”. basé sur ses années d’expérience, elle calcule que la probabilité qu’un candidat ne paie pas un prêt initial est de “$0,025$”. Le mois dernier, elle a accordé 40 prêts.

1. Quelle est la probabilité que 3 prêts ne soient pas remboursés ?
2. Quelle est la probabilité qu’au moins 3 prêts ne soient pas remboursés ?

Lois de Probabilités Discrètes

Modèle de Poisson$\sim$ modèle Binomial

•Exemple-indication

Considérer X la variable aléatoire indiquant le nombre de candidats, parmi les "40" qui no paient pas le prêt initial. Alors $X \sim \mathcal{B}(n = 40, p = 0.025)$. Remarquer que $n \geq 30$ et $P \to 0$. Par conséquent on peut aproximer la loi de X par une de poisson $\mathcal{P}(\lambda = np = 40 \times 0.025 = 1)$. Il est demandé donc de calculer les probabilités

1. $P(X = 3) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{1}{6}e^{-1}$
2. $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$