Chapitre 4:

Dualité et Analyse post-optimale

Introduction:

- Reprenons l'exemple du restaurateur (Cas nº1):

Coûts marginaux

$$\text{Max } 8x+6y$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} 5x+3y \leq 30 \\ 2x+3y \leq 24 \\ x+3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

V_1=Coût des oursins

V_2=Coût des crevettes

V_3=Coût des huitres

Quantités optimales

- On imagine un client qui veut acheter toutes la marchandise à un coût qui lui convient et qui pousse le restaurateur à tout vendre.
- Donc ce client veut aussi minimiser le prix tout en satisfaisant aux éxigences du restaurateur.
- Ce qui suggère le problème suivant:

Quantités optimales

$$\text{Min } 30V_1 + 24V_2 + 18V_3$$

Sujet à
$$\begin{cases} 5V_1 + 2V_2 + V_3 \geq 8 \\ 3V_1 + 3V_2 + 3V_3 \geq 6 \\ V_1,\ V_2,\ V_3 \geq 0 \end{cases}$$

Coûts marginaux

- Le problème ainsi défini s’appelle le problème dual du problème du restaurateur.
- Et le problème du restaurateur est dit primal de ce problème.
- On pourrait aussi bien dire le contraire; on peut voir que le dual du dual est égal au primal.

Remarques:

- A chaque variable du primal, on fait correspondre une contrainte du dual et à chaque contrainte du primal, on fait correspondre une variable du dual.
- Le nombre de variables (resp. contraintes) du problème primal est égal au nombre de contraintes (resp. variables) du problème dual.

- Les coefficients de la fonction objectifs (c'est-à-dire les coûts marginaux) pour le primal sont les termes de droites des contraintes pour le dual (et réciproquement).
- Les inégalités intervenant dans les contraintes des deux problèmes sont de sens opposés.

- Si le primal est un problème de maximisation, alors le dual est un problème de minimisation et vice-versa.
- L’intérêt essentiel de la dualité est qu’il suffit de résoudre un des deux problèmes pour obtenir la solution de l’autre.

L'algorithme dual du Simplexe:

- Comme exemple, on va appliquer l'algorithme dual du Simplexe au problème dual du restaurateur:

$$\text{Min } 30V_1+24V_2+18V_3$$

Sujet à
$$\begin{cases} 5V_1+2V_2+V_3 \geq 8 \\ 3V_1+3V_2+3V_3 \geq 6 \\ V_1,\ V_2,\ V_3 \geq 0 \end{cases}$$

- La forme standard du problème est:

Min $30V_1+24V_2+18V_3$

Sujet à
$$\begin{cases} 5V_1+2V_2+V_3-V_4=8 \\ 3V_1+3V_2+3V_3-V_5=6 \\ V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \geq 0 \end{cases}$$

- On transforme le problème de la façon suivante:

$$\text{Min } 30V_1+24V_2+18V_3$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} -5V_1-2V_2-V_3+V_4=-8 \\ -3V_1-3V_2-3V_3+V_5=-6 \\ V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau initial de l'algorithme dual du simplexe est:

V. b.	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	-Z	T. d.
V_4	-5	-2	-1	1	0	0	-8
V_5	-3	-3	-3	0	1	0	-6
-Z	30	24	18	0	0	1	0

La valeur négative la plus petite parmi les termes de droite est -8, donc la variable de sortie est V_4.

- On divise alors les coefficients des variables hors base dans la dernière ligne par leurs correspondants dans la ligne de la variable de sortie, on a:
- 30/-5=-6; 24/-2=-12; 18/-1=-18
- Le pivot est -5 car il correspond à la valeur la **plus grande négative** après cette division.

D’où la variable d’entrée est: V1.
Le 2ème tableau de l’algorithme dual du simplexe est:

V. b.	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	-Z	T. d.
V_1	1	2/5	1/5	-1/5	0	0	8/5
V_5	0	-9/5	$\boxed{-12/5}$	-3/5	1	0	-6/5
-Z	0	12	12	6	0	1	-48

La valeur négative parmi les termes de droite est -6/5.

La variable de sortie est V_5.

- Pour déterminer le pivot, on divise:

  12x(-5/9)=-6,7; 12x(-5/12)=-5; 6x(-5/3)=-10
- Le pivot est -12/5 qui correspond à la valeur la plus grande négative après cette division.
- D'où la variable d'entrée est V_3.
- Le 3ème tableau de l'algorithme dual du Simplexe est:

V. b.	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	-Z	T. d.
V_1	1	1/4	0	-1/4	1/12	0	3/2
V_3	0	3/4	1	1/4	-5/12	0	1/2
-Z	0	3	0	3	5	1	-54

Les termes de droites sont positifs, on arrêtte, on est à l'optimum. La valeur optimale est $Z=54$.

Une solution optimale est $V_1=3/2$ et $V_3=1/2$, les autres variables hors base sont nulles.

Exercice:

- Appliquer l'algorithme dual du Simplexe pour résoudre le problème suivant:

Min $3x_1+4x_2+5x_3$

Sujet à
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3\geq 5 \\ 2x_1+2x_2+x_3\geq 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

- La forme standard du problème est:

$$\text{Min } 3x_1+4x_2+5x_3$$

Sujet à
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=5 \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_5=6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- On transforme le problème de la façon suivante:

$$\text{Min } 3x_1+4x_2+5x_3$$

$$\text{Sujet à} \quad \begin{cases} -x_1-2x_2-3x_3+x_4=-5 \\ -2x_1-2x_2-x_3+x_5=-6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau initial de l'algorithme dual du simplexe est:

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-Z	T. d.
x_4	-1	-2	-3	1	0	0	-5
x_5	-2	-2	-1	0	1	0	-6
-Z	3	4	5	0	0	1	0

La valeur négative la plus petite parmi les termes de droite est -6, donc la variable de sortie est x_5.

- On divise alors les coefficients des variables hors base dans la dernière ligne par leurs correspondants dans la ligne de la variable de sortie, on a:

$$3/-2=-1,5 \quad ; \quad 4/-2=-2 \quad ; \quad 5/-1=-5$$

- Le pivot est -2 car il correspond à la valeur la **plus grande négative** après cette division.

D’où la variable d’entrée est: x_1.
Le 2ème tableau de l’algorithme dual du simplexe est:

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-Z	T. d.
x_4	0	$\boxed{-1}$	-5/2	1	-1/2	0	-2
x_1	1	1	1/2	0	-1/2	0	3
-Z	0	1	7/2	0	3/2	1	-9

La valeur négative parmi les termes de droite est -2.

La variable de sortie est x_4.

- Pour déterminer le pivot, on divise:

  1/-1=-1 ; 7/2x(-2/5)=-1,4 ; 3/2x(-2)=-3
- Le pivot est -1 qui correspond à la valeur la plus grande négative après cette division.
- D'où la variable d'entrée est x_2.
- Le 3ème tableau de l'algorithme dual du Simplexe est:

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-Z	T. d.
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	0	2
x_1	1	0	-2	1	-1	0	1
-Z	0	0	1	1	1	1	-11

Les termes de droites sont positifs, on arrêtte, on est à l'optimum. La valeur optimale est $Z=11$.

Une solution optimale est $x_1=1$ et $x_2=2$, les autres variables hors base sont nulles.

Comparaison du tableau optimal primal et tableau optimal dual

- Les valeurs de la fonction économique à l'optimum sont égales.
- Les valeurs des variables de base du primal sont égales aux coefficients des variables hors base du dual.
- La dualité a donc deux intérêts essentiels:
  - Elle facilite la resolution des problèmes en transformant une maximisation en ≤ en une minimisation en ≥.
  - Elle permet l'interpretation économique du tableau optimal du simplexe et en particulier celle des coefficients de Z à l'optimum.

Interprétation économique du primal :

- Le problème du restaurateur était (Cas nº1):

Coûts marginaux

$$\text{Max } 8x+6y$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} 5x+3y+u=30 \\ 2x+3y+p=24 \\ x+3y+h=18 \\ x,\ y,\ u,\ p,\ h \geq 0 \end{cases}$$

Quantités optimales

Nombre d'assièttes à préparer

Interprétation économique du primal :

- À l'optimum, on a trouvé que: x=3; y=5; u=0; h=0; p=3 et la valeur optimal est 54.
- Il faut que le restaurateur prépare 3 assiéttes à 8 dhs et 5 assiéttes à 6 dhs pour maximiser son revenu qui sera 54 dhs comme maximum.
- u=0 et h=0 ═> la 1ère et la 3ème contraintes sont "saturées" (on va utiliser tous le stock en oursins et en huitres).
- Par contre p=3, donc la 2ème contrainte n'est pas "saturée" (il va rester encore 3 crevettes en stock!!).

Interprétation économique du dual :

- Le problème dual du restaurateur était:

$$\text{Min } 30V_1+24V_2+18V_3$$

Sujet à

$$5V_1+2V_2+V_3-V_4=8$$

$$3V_1+3V_2+3V_3-V_5=6$$

$$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \geq 0$$

- À l'optimum, on a trouvé que: $V_1=1,5;$ $V_2=0;$ $V_3=0,5,$ $V_4=0;$ $V_5=0$ et la valeur optimale est 54.

Interprétation économique du dual :

- Les prix minimaux unitaires sont:
  - des oursins 1dh50 l'unité.
  - des crevettes 0 dh.
  - des huitres 0,50 dh l'unité.
- Le prix total minimal est: 54 dh.
- Bien sûr $V_4=V_5$=0, car il convient au client d'acheter aux prix minimales proposés par le restaurateur.

Analyse post-optimale:

- Quel effet peut-avoir la variation de l’un ou de plusieurs paramètres d’un problème d’un programme linéaire sur la solution optimale?
- Une analyse de sensibilité se résume à la recherche des intervalles de variations possibles des paramètres du programme linéaire sans que la solution optimale ne soit modifiée.

Analyse post-optimale:

- Or dans la plupart des situations, ces calculs sont prévisionnels, qu'il s'agisse d'une maximisation de marge sur coûts variables ou d'une minimisation du coût de production.
- Il est donc important de pouvoir évaluer la sensibilité obtenue à une variation des paramètres.

Modification des coefficients de Z:

- Nous considérons l'exemple du réstaurateur:

  Max $8x+6y$ ou Min $-8x-6y$

  Sujet à
  $$5x+3y+u=30$$
  $$2x+3y+p=24$$
  $$x+3y+h=18$$
  $$x,y,u,p,h\geq 0$$

- Il s'agit ici de savoir dans quelle mesure une modification des coûts marginaux d'un des deux assiëttes (produits) modifie le programme de production.

Modification des coefficients de Z:

- Supposons que le coût marginal de 1ère assiètte (produit) soit susceptible de varier d'une petite quantité **non-négative** δ.
- Le tableau final du problème du réstaurateur devient:

V. b.	x	y	u	p	h	-Z	T. d.
x	1	0	1/4	0	-1/4	0	3
p	0	0	-1/4	1	-3/4	0	3
y	0	1	-1/12	0	5/12	0	5
-Z	δ	0	3/2	0	1/2	1	54

Il faut donc annuler le coefficient δ car x, p et y sont des variables de base, cela veut dire qu'il faut exécuter un pivot pour qu'il le soit.

V. b.	x	y	u	p	h	-Z	T. d.
x	1	0	1/4	0	-1/4	0	3
p	0	0	-1/4	1	-3/4	0	3
y	0	1	-1/12	0	5/12	0	5
-Z	0	0	$3/2-\delta/4$	0	$\frac{1}{2}+\delta/4$	1	$54-3\delta$

Donc pour rester à l’optimum, il faut que:

$$3/2-\delta/4 \geq 0 \iff \delta \leq 6$$

Sinon, on ne serait plus à l’optimum et la variable u entre dans la base.

Remarque:

- Cette analyse peut être faite sur le problème dual.
- Alors, ce sont les termes de droite qui seront mis aux modifications, bien que l'on peut aussi faire une analyse des termes de droite du primal dans le problème primal.

Modifications des termes de droite des contraintes:

- C’est le cas d’une incertitude sur les ressources disponibles.
- Nous cherchons ici, donc, à analyser la stabilité de la solution optimale lorsque l’un (ou plusieurs) des termes de droite est modifié.
- Nous avons déjà abordé ce problème de manière informelle dans l’interprétation des coefficients de Z à l’optimum.

Modifications des termes de droite des contraintes:

- En effet, modifier un terme de droite revient à changer la quantité des ressources disponibles (dans le cas de la maximisation).
- Il est clair que les conséquences d'une modification du second membre sont différentes selon si la contrainte est saturée ou pas à l'optimum.
- Lorsque la contrainte est **non saturée**, on peut **changer** (dans une certaine mesure) le terme de droite **sans changer l'optimum**.

Exemple:

- Pour le problème du réstaurateur:

$$\text{Max } 8x+6y$$

Sujet à

$$5x+3y+u=30$$

$$2x+3y+p=24$$

$$x+3y+h=18$$

$$x,y,u,p,h \geq 0$$

On a trouvé, à l'optimum: $u=0; p=3$ et $h=0.$

Exemple:

- Donc, la $1^{ère}$ et la $3^{ème}$ contrainte sont saturées alors que la $2^{ème}$ est non saturée.
- La quantité utilisée, dans la 2ème contrainte, est 21(=24-3) crevettes alors qu'on avait en ressources 24 crevettes.
- Donc, réduire cette quantité ne change pas l'optimum car il reste 3 crevettes non utilisées!!.

Conclusion:

- Cette simple remarque permet de constater que les variables d'écart dans la base à l'optimum (c'est-à-dire p dans l'exemple du réstaurateur) donnent directement les variations maximales des termes de droite qui ne changent pas la solution optimale.
- À l'inverse, lorsque la variable d'écart est hors base, la solution optimale est modifiée dés que l'on change le terme de droite.

Ajout ou élimination d'une contrainte:

- Considérons de nouveau l'exemple du réstaurateur, ou nous faisons les modifications suivantes:
- Les ressources: 30 oursins, 24 crevettes, 18 huîtres + 20 calmars.
- 2 calmars dans les assièttes à 8DH
- 3 calmars dans les assièttes à 6DH.
- D'où la nouvelle contrainte: $2x+3y\leq 20$.
- Soit $e\geq 0$ une variable d'écart: $2x+3y+e=20$.

On ajoute une ligne et une colonne dans le tableau optimal de problème du réstaurateur:

V. b.	x	y	u	p	h	e	-Z	T. d.
x	1	0	1/4	0	-1/4	0	0	3
p	0	0	-1/4	1	-3/4	0	0	3
y	0	1	-1/12	0	5/12	0	0	5
e	2	3	0	0	0	1	0	20
-Z	0	0	3/2	0	1/2	0	1	54

- Ce tableau n’est plus optimal à cause des coefficients “2” et “3” dans la ligne de “e” et les colonnes de “x” et “y”.
- Pour qu’il le soit, il faut que les colonnes des variables de base contiennent des “1” au pivot et des zéros ailleurs.
- Alors, il faut faire deux transformations linéaires pour retrouver l’optimum.

V. b.	x	y	u	p	h	e	-Z	T. d.
x	1	0	1/4	0	-1/4	0	0	3
p	0	0	-1/4	1	-3/4	0	0	3
y	0	1	-1/12	0	5/12	0	0	5
e	0	3	-1/2	0	1/2	1	0	14
-Z	0	0	3/2	0	1/2	0	1	54

V. b.	x	y	u	p	h	e	-Z	T. d.
x	1	0	1/4	0	-1/4	0	0	3
p	0	0	-1/4	1	-3/4	0	0	3
y	0	1	-1/12	0	5/12	0	0	5
e	0	0	-1/4	0	$\boxed{-3/4}$	1	0	-1
-Z	0	0	3/2	0	1/2	0	1	54

- On n’est pas encore à l’optimum car il y a un terme de droite négatif et par l’algorithme dual du simplexe, il faut encore faire un pivotage.
- Variable de sortie: e
- (3/2)x(-4)=-6; (1/2)x(-4/3)=(-0,6)
- Donc la variable d’entrée est: h

V. b.	x	y	u	p	h	e	-Z	T. d.
x	1	0	1/3	0	0	-1/3	0	10/3
p	0	0	0	1	0	-1	0	4
y	0	1	-2/9	0	0	5/9	0	40/9
h	0	0	1/3	0	1	-4/3	0	4/3
-Z	0	0	4/3	0	0	2/3	1	53,33

Ce tableau est bien optimal, on s'arrêtte.