Chapitre 3:

Variante du Simplexe: Méthode des deux phases

Introduction

- Beaucoup des problèmes pratiques se présentent avec, au départ, une forme qui satisfait au critère de convergence du simplexe.
- Les modèles économiques et de la gestion, en effet, contiennent souvent des activités de stockage et des possibilités de non-utilisation de certaines ressources (main-d'œuvres, matières premières) ce qui permet de partir d'une solution possible évidente, celle qui consiste à ne rien faire du tout.

- Certes, une telle solution peut être très éloignée de la solution optimale, mais au moins, elle constitue un point de départ immédiat et aisé.
- On utilise dans ces situations une variante du simplexe dite la méthode des deux phases.

La méthode des deux phases:

- On a à résoudre, par exemple, le problème suivant:

$$\text{Min } Z=10\,x_1+2x_2+x_3$$

$$\text{Sujet à} \quad \begin{aligned} x_1+x_3&=3 \\ 5x_1+x_2+3x_3&=20 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- On remarque que les coefficients de *Z* sont tous positifs, alors on ne peut pas dire qu'on est à l'optimum et s'arrêter, mais plutôt on utilise la méthode des deux phases du Simplexe.

- On introduit des variables non négatives dans les contraintes, que l'on appelle des variables artificielles. Soient t_1 et t_2 ces variables et les contraintes deviennent:

$$x_1+x_3+t_1=3$$

$$5x_1+x_2+3x_3+t_2=20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$t_1,t_2 \geq 0$$

Soit $M=t_1+t_2$

- On tire des contraintes que

$$t_1=3-x_1-x_3 \quad \text{et} \quad t_2=20-5x_1-x_2-3x_3$$

- Donc $M=3-x_1-x_3+20-5x_1-x_2-3x_3$

  $M=-6x_1-x_2-4x_3+23$
- Dans une première phase, on résoud le problème linéaire suivant:

$$\text{Min } M=-6x_1-x_2-4x_3+23$$

Sujet à $x_1+x_3+t_1=3$

$5x_1+x_2+3x_3+t_2=20$

$10x_1+2x_2+x_3-Z=0$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

$t_1, t_2 \geq 0$

v. e.

V. b.	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	-M	-Z	T.d
v. s. t_1	1	0	1	1	0	0	0	3
t_2	5	1	3	0	1	0	0	20
-Z	10	2	1	0	0	0	1	0
-M	-6	-1	-4	0	0	1	0	-23

v. e.

V. b.	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	-M	-Z	T.d
x_1	1	0	1	1	0	0	0	3
v. s. t_2	0	$\boxed{1}$	-2	-5	1	0	0	5
-Z	0	2	-9	-10	0	0	1	-30
-M	0	-1	2	6	0	1	0	-5

V. b.	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	-M	-Z	T.d
x_1	1	0	1	1	0	0	0	3
x_2	0	1	-2	-5	1	0	0	5
-Z	0	0	-5	0	-2	0	1	-40
-M	0	0	0	1	1	1	0	0

- M=0 $\Rightarrow$ l'ensemble des solutions est non vide (si on aurait trouvé M>0, alors, on dira que l'ensemble des solutions est vide).

- $x_1=3$; $x_2=5$; $x_3=0$; $t_1=0$; $t_2=0$ s'appelle une solution de base réalisable du problème original.
- Dans une deuxième phase, on élimine les variables artificielles t_1 et t_2; on obtient le tableau suivant à partir du dernier tableau de la phase I

V. b.	x_1	x_2	x_3 v. e.	-Z	T.d
v. s. x_1	1	0	$\boxed{1}$	0	3
x_2	0	1	-2	0	5
-Z	0	0	-5	1	-40

- Maintenant, oui, on peut appliquer la méthode du Simplexe…

V. b.	x_1	x_2	x_3	-Z	T.d
x_3	1	0	1	0	3
x_2	2	1	0	0	11
-Z	5	0	0	1	-25

On est à l'optimum, la valeur optimale est Z=25.
Une solution optimale est $x_1=0$; $x_2=11$ et $x_3=3$.

Exercice:

Appliquer la méthode des deux phases pour résoudre le problème linéaire suivant:

$$\text{Min } Z = 400\, x_1 + 700\, x_2 + 800\, x_3 + 1000\, x_4$$

Sujet à $x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 200$

$x_2 + x_3 + x_4 \geq 150$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Solution:

La forme standard du problème est:

$$\text{Min } Z=400\ x_1+700\ x_2+800\ x_3+1000\ x_4$$

Sujet à $x_1+x_2+2x_4 - e_1 = 200$

$x_2+x_3+x_4 - e_2 = 150$

$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$

$e_1,\ e_2 \geq 0$

Soient t_1 et t_2 des variables artificielles que l'on introduit dans les contraintes:

$$x_1+x_2+2x_4-e_1+t_1= 200$$

$$x_2+x_3+x_4-e_2+t_2= 150$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ e_1,\ e_2 \geq 0$$

$$t_1,\ t_2 \geq 0$$

Soit $M=t_1+t_2$ où $t_1= 200-x_1-x_2-2x_4 +e_1$

$t_2= 150- x_2-x_3-x_4 +e_2$

D'où $M= -x_1-2x_2-x_3-3x_4+e_1+e_2+350$

- **Phase I:**

$$\text{Min } M = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + e_1 + e_2 + 350$$

Sujet à $x_1 + x_2 + 2x_4 – e_1 + t_1 = 200$

$x_2 + x_3 + x_4 – e_2 + t_2 = 150$

$400\, x_1 + 700\, x_2 + 800\, x_3 + 1000\, x_4 - Z = 0$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ e_1,\ e_2 \geq 0$

$t_1,\ t_2 \geq 0$

V. b.	x_1	x_2	x_3	v. e. x_4	e_1	e_2	t_1	t_2	-Z	-M	T.d
v. s. t_1	1	1	0	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	0	0	200
t_2	0	1	1	1	0	-1	0	1	0	0	150
-Z	400	700	800	1000	0	0	0	0	1	0	0
-M	-1	-2	-1	-3	1	1	0	0	0	1	-350

V. b.	x_1	x_2	v. e. x_3	x_4	e_1	e_2	t_1	t_2	-Z	-M	T.d
x_4	1/2	1/2	0	1	-1/2	0	1/2	0	0	0	100
t_2 v. s.	-1/2	1/2	$\boxed{1}$	0	1/2	-1	-1/2	1	0	0	50
-Z	-100	200	800	0	500	0	-500	0	1	0	-100000
-M	1/2	-1/2	-1	0	-1/2	1	3/2	0	0	1	-50

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	t_1	t_2	-Z	-M	T.d
x_4	1/2	1/2	0	1	-1/2	0	1/2	0	0	0	100
x_3	-1/2	1/2	1	0	1/2	-1	-1/2	1	0	0	50
-Z	300	-200	0	0	100	800	-100	-800	1	0	-140000
-M	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0

M=0, donc l'ensemble des solutions est non vide, x_3=50 ; x_4=100 est une solution de base réalisable du problème originale.

- **Phase II:**

  On élimine les variables artificielles t_1 et t_2, du dernier tableau de la phase I, on obtient:

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	-Z	T.d
x_4	1/2	½	0	1	-1/2	0	0	100
x_3	-1/2	$\boxed{½}$	1	0	1/2	-1	0	50
-Z	300	-200	0	0	100	800	1	-140000

v. e.

v. s.

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	-Z	T.d
x_4	1	0	-1	1	-1	1	0	50
x_2	-1	1	2	0	1	-2	0	100
-Z	100	0	400	0	300	400	1	-120000

On est à l'optimum, la valeur optimale est Z=120000
Une solution optimale est x_2=100; x_4=50, les autres variables, étant hors base, sont nulles.

Exercice 2 de la page 50:

1. Appliquer la méthode des deux phases pour résoudre le problème linéaire suivant:

   Min $Z = x_1 + x_2 + x_3$

   Sujet à $x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$

   $x_1 + x_2 \leq 2$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2. Laquelle des contraintes est saturée par la solution trouvée et pourquoi?
3. Peut-on appliquer la méthode graphique à ce problème? Justifier votre réponse.

Solution:

- On introduit une variable de surplus dans la $1^{ère}$ contrainte notée $e_1 \geq 0$ et une variable d'écart $e_2 \geq 0$ dans la $2^{ème}$ contrainte, le problème devient:

Min $Z = x_1 + x_2 + x_3$

Sujet à $x_1 + x_2 + 2x_3 - e_1 = 3$

$x_1 + x_2 + e_2 = 2$

$x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0$

- Par la méthode des deux phases de Simplexe, on introduit deux variables artificielles t_1 et t_2 non négatives dans les contraintes:

$$x_1+x_2+2x_3-e_1+t_1= 3$$

$$x_1+x_2+e_2+t_2=2$$

Soit $M=t_1+t_2$

or $t_1=3-x_1-x_2-2x_3+e_1$

$t_2=2-x_1-x_2-e_2$

Donc $M=-2x_1-2x_2-2x_3+e_1-e_2+5$

Phase I:

Min $M=-2x_1-2x_2-2x_3+e_1-e_2+5$

Sujet à $x_1+x_2+2x_3-e_1+t_1= 3$

$x_1+x_2+e_2+t_2=2$

$x_1+ x_2+ x_3-Z=0$

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

$e_1,e_2\geq 0$

$t_1, t_2 \geq 0$

v. e.

V. b.	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	t_1	t_2	-Z	-M	T.d
v. s. t_1	1	1	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	0	0	3
t_2	1	1	0	0	1	0	1	0	0	2
-Z	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
-M	-2	-2	-2	1	-1	0	0	0	1	-5

- La variable d’entrée est x_3 car en divisant les termes de droite par les coefficients de tous les variables susceptibles d’entrer dans la base.
- Soit 3/1, 2/1, 3/2 et 2/0, la plus petite valeur positive correspond à x_3 et un pivot en 2 et la variable de sortie est t_1; on exécute le pivot, on obtient le tableau suivant:

v. e.

V. b.	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	t_1	t_2	-Z	-M	T.d
x_3	1/2	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0	3/2
v. s. t_2	1	1	0	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	2
-Z	1/2	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	1	0	- 3/2
-M	-1	-1	0	0	-1	1	0	0	1	-2

- Par un raisonnement pareil au précédent, la variable d’entrée est e_2, le pivot est 1 et la variable de sortie est t_2. Le tableau suivant est:

V. b.	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	t_1	t_2	-Z	-M	T.d
x_3	1/2	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0	3/2
e_2	1	1	0	0	1	0	1	0	0	2
-Z	1/2	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	1	0	-3/2
-M	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0

M=0 $\Longrightarrow$ l'ensemble des solutions réalisables est non vide.

Une solution de base réalisable est $x_1=x_2=0$; $x_3=3/2$, $e_1=0$ et $e_2=2$

Phase II:

- On élimine t_1, t_2 et M du dernier tableau de la phase I, on obtient:

V. b.	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	-Z	T.d
x_3	1/2	1/2	1	-1/2	0	0	3/2
e_2	1	1	0	0	1	0	2
-Z	1/2	1/2	0	1/2	0	1	-3/2

On est à l'optimum.

Z=3/2

$x_1=x_2=0$; $x_3=3/2$; $e_1=0$ et $e_2=2$

2. $e_1=0$ $\Longrightarrow$ la première contrainte est « saturée » par la solution trouvée. L'inégalité au sens large est devenue une égalité pour $x_1=x_2=0$ et $x_3=3/2$.

   $e_2=2$ $\Longrightarrow$ la deuxième contrainte n'est pas « saturée », l'inégalité subsiste pour $x_1=x_2=0$ et $x_3=3/2$.

3. On ne peut pas utiliser la méthode graphique pour ce programme car il fait intervenir trois variables et non pas deux, et c’est pour cela que l’on a résolu par le simplexe.