Corrigés des éxercices[Serie 1]

2. On a quatres lots préstigieux d'importance décroissante

   a) La répartition se fait selon l'ordre d'importance, donc il ya $4! = \times 3 \times 2 \times 1$ façons de répartir les lots entre les 4 clients.

   b) Cette opération se fait en deux parties: Considérer premièrement N l'ensemble de toutes les possibilités de choisir 4 client entre dix. Il s'agit d'une disposition non ordonnée de 4 parmi 10. donc

   $$N = \mathtt{C}_{10}^{4}$$

   . Ainsi, le nombre possible sera égale à $4! \times N$

5. On a à choisir les 5 numéros entre les chiffres connus $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ telques

   - le premier numéro est fixé en Zero$\rightarrow n_1 = 0$
   - le duexième varie de "1 à 5" $\rightarrow$ il ya $\mathtt{C}_5^1$ possibilité et
   - les trois restants sont de choix libre

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
0	[1-5]	?	?	?

   a) Ces dérniers doivent êtres arrangés de trois en trois d'une manière ordonnée , et ils peuvent se répéter$\longrightarrow$il y'aura donc 10^3 possibilités (il s'agit d'arranger 3 éléments parmi 10 avec répétition).

      En utilisant le principe multiplicatif on aura $1 \times \mathtt{C}_5^1 \times 10^3$

   b) Pour que les chiffres soient tous différents, les trois dérniers chiffres, n_1, n_2, n_3 ne doivent pas prendre la valeur "0" ni la valeur prise par n_2. Donc il s'agit d'un arrangement ordonné de trois élements parmi 8 et sans répetition.$\longrightarrow$ A_8^3. par conséquent les possiblités son $1 \times \mathtt{C}_5^1 \times 10^3$

7. L'ensemble des résultats est donné para

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

a) La probabilité d'un événement quelconque I de Ω est égale à "$P(I) = KI$ "avec k la constante de proportionalité à chercher. Il vient donc que

$P(1) = K,\ P(2) = 2K,\ P(3) = 3K,\ P(4) = 4K,\ P(5) = 5K,\ P(6) = 6K$

b) En utilisant la relation $\sum_{i=1}^{i=6} p_i = 1$, on aura

$$K(1+2+3+4+5+6) = 1 \longrightarrow 21K = 1 \longrightarrow K = \frac{1}{21}$$

Par suite si $I = \{2, 4, 6\}$ on aura

$$P(I) = K(2+4+6) = \frac{12}{21}$$

Corrigés des éxercices[Serie 2]

3. On veut remplir 7 taches identique et 14 candidats qui se présentent à cette opération.

   a) puisque les tache son identique il s'agirt de choisir 7 candidats parmi 14 $\longrightarrow \mathtt{C}_{14}^{7}$

   b) Si un des candidats est emboché, alors on doit choisir 6 parmi les 13 restants $\longrightarrow \mathtt{C}_{13}^{6}$

   c) Si un des candidats est exclue, alors le choix se fait parmi 13 $\longrightarrow \mathtt{C}_{13}^{7}$

   d) On a la relation de pascal suivante

$$\mathtt{C}_{14}^{7} = \mathtt{C}_{13}^{7} + \mathtt{C}_{13}^{6} \longleftarrow \mathtt{C}_{n}^{p} = \mathtt{C}_{n-1}^{p-1} + \mathtt{C}_{n-1}^{p}$$

6. Indiquons par

   A:=Evénement $\lll$ investir en Action$\ggg$

   O:=Evénement $\ll$ investir en Obligation$\ggg$

   il vien que $P(O) = 0{,}20$ et $P(A/O) = 0{,}70$

a) Soit I l'événement tel que $I = A \cap O$
On a

$$P(I) = P(A \cap O) = P(A/O)P(O) = 0{,}70 \times 0{,}20 = 0{,}14$$

b) Cette question nous demande de calculer

$$P(O/A) = \frac{P(A/O)P(O)}{P(A)} \longleftarrow \text{Formule de Bayes}$$

avec

$$P(A) = P(A/O)P(O) + P(A/\bar{O})P(\bar{O}) \longleftarrow \text{ Formule de la probabilité totale.}$$

Selon l'énoncé on a $P(\bar{O}) = 0{,}80$ et $P(A/\bar{O}) = 0{,}15$. Par suite on aura

$$P(A) = 0{,}20 \times 0{,}70 + 0{,}80 \times 0{,}15 = 0{,}26$$

Finalement on a

$$P(O/A) = \frac{0{,}14}{0{,}26} \simeq 0{,}538$$

Corrigés des éxercices[Serie 4]

1. Soit

A= l'événement " la première boule tirée est blanche"

B= l'événement " la première boule tirée est noire"

Selon l'énoncé on a

$$P(A) = \frac{C_5^1}{C_{12}^1} = \frac{5}{12} \text{ et } P(B) = \frac{C_7^1}{C_{12}^1} = \frac{7}{12}$$

Noter que $\Omega = AUB$ et $A \cap B = \emptyset$. (A et B forment une partition)

Formule de probabilité total

$$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B)$$

Reste à calculer $P(D/A)$ et $P(D/B)$

On a

$$\begin{aligned} P(D/A) &= \frac{C_7^1}{C_{11}^1} = \frac{7}{11} \\ P(D/B) &= \frac{C_6^1}{C_{11}^1} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

Par suite

$$P(D) = \frac{7}{11} \times \frac{5}{12} + \frac{6}{11} \times \frac{7}{12}$$

Corrigés des éxercices[Serie 2]

1. Pour répondre à cet exercice, on distingue deux cas

   $a)$ Sans répétition (sans remise)

   $$\Omega = \{15, 18, 58, 51, 81, 85\} \rightarrow |\Omega| = A_3^2$$

   $b)$ Cas avec répétition (avec remise)

   $$\Omega = \{15, 18, 58, 51, 81, 85, 11, 55, 88\} \rightarrow |\Omega| = a_3^2$$

2. Remarquez que "sans remise" implique que le tirage se fait d'une manière successive, ca veut dire l'ordre de tirage d'une couleur ou autre doit être considérer. Donc

   $$\Omega = \{BB, BN, NB, NN\}$$

   ou

   B :=événement ⋘ boule tirée est blanche⋙

   N :=événement ⋘ boule tirée est noire⋙

   La définition par liste de ces deux événements est

   $$A = \{BB, BN, NB\}, \text{ et } B = \{BB\}$$

a) On a $A \cap B = \{BB\}$, par suite il s'agit de deux événement compatibles

b) A est un événement composé, car il contient plusieurs eventualités; et B est élémentaire car il contient une seule éventualité.

c)

$$P(A) = P(BB) + P(BN) + P(NB)$$

avec

$$\begin{aligned} P(BB) &= \frac{C_6^1}{C_{20}^1} \times \frac{C_5^1}{C_{19}^1} = \frac{30}{380} \\ P(BN) = P(NB) &= \frac{C_{14}^1}{C_{20}^1} \times \frac{C_6^1}{C_{19}^1} = \frac{84}{380} \end{aligned}$$

5. Notons par

I :=l'événement ⋘ investisseur bien informé ⋙

J :=l'événement ⋘ investisseur mal informé ⋙

A :=l'événement ⋘action achetée est caractérisée par une hausse de son prix ⋙.

La question nous demande de calculer $P(I/A)$. Par application de la formule de bayes on

$$P(I/A) = \frac{P(A/I)P(I)}{P(A/J)P(I) + P(A/J)P(J)}$$

avec

$$P(A/I) = 0{,}8;\ \ P(I) = \frac{5}{50};\ \ P(A/J) = 0{,}5 \text{ et } P(J) = \frac{45}{50}$$

D'ou $P(I/A) = \frac{8}{53}$

7. Soients les événements suivants:

A := événement ⋘la question est bien répondue par l'étudiant A⋙

B := événement ⋘la question est bien répondue par l'étudiant B⋙

On a $P(A) = 0{,}8$ et $P(B) = 0{,}75$.

a) Question bien répondue par les deux étudiants:
$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}8 \times 0{,}75 = 0{,}6 \longleftarrow$ indépendance entre les deux événements

b) Question est bien répondue:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8+0{,}75-0{,}6$

c) Question n'est pas répondue correctement:

$$\begin{array}{rcl} P(\overline{A\cup B}) & = & P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A}).P(\bar{B}) \\ & = & (1-P(A))(1-P(B))=0{,}2\times 0{,}25=0{,}5 \end{array}$$

Noter bien que les deux événements complémentaires$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

d) Question bien répondue par l'un mais pas par l'autre:

$$\begin{array}{rcl} P(A\Delta B) & = & P[(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)]=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B) \\ & = & P(A).P(\bar{B})+P(\bar{A}).P(B) \\ & = & 0{,}8\times 0{,}25+0{,}20\times 0{,}75= \end{array}$$

10. notons par

B := l'événement ⋘ personne à bas risque choisie⋙

M := l'événement ⋘ personnes à moyen risque choisie⋙

H := l'événement ⋘ personnes à haut risque choisie⋙

A := l'événement ⋘ avoir un accident ⋙

On a $P(B)=0{,}05;\ P(M)=0{,}15;$ et $P(H)=0{,}30$

a) par la formule de la probabilité totale:

$$\begin{array}{rcl} P(A) & = & P(A/B)P(B)+P(A/M)P(M)+P(A/H)P(H) \\ & = & 0{,}05\times 50\,\%+0{,}15\times 30\,\%+0{,}30\times 20\,\% \\ & = & 0{,}05\times 0{,}5+0{,}015\times 0{,}3+0{,}30\times 0{,}2 \\ & = & 0{,}13 \end{array}$$

b) Soit $\bar{A}$, l'événement contraire 'a A. Alors, en utilisant la formule de bayes on aura

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(\bar{A}/B)P(B)}{P(\bar{A})=1-P(A)}$$

avec $P(\bar{A}/B)=1-P(A/B),$ et

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\bar{A}/B)P(B) + P(\bar{A}/M)P(M) + P(\bar{A}/H)P(H) \\ &= 1 - P(A/B)P(B) + P(A/M)P(M) + P(A/H)P(H) \end{aligned}$$

Par consequent, on a

$$P(B/\bar{A}) = \frac{(1-0{,}05)50\,\%}{1-0{,}13} = \frac{0{,}95\times 0{,}5}{0{,}87} \simeq 0{,}5459$$

Corrigés des éxercices[Serie 3]

4. Si on design par A l'événement indiquant "l'arrivée d'un client au guichet", alors on s'inmtérésse au nombre de réalisation de A pendant un certain interval de temps.

   a) Une variable aléatoire adaptée à cette expérience est une qui suit une loi de poisson de parametre lambda= λ à détérminer. Soit donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ cette variable aléatoire.

   Selon l'énoncé , pendant un inetervalle de temps d'une minute "$[n, n+1]$" , le parametre λ est donné par "$\lambda = p = 0{,}1$".

   b) Pendant une heure on a "$\lambda = 60{,}1 = 6$". Alors

   $$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{i=0}^{i=9} P(X = i)$$

   avec

   $$\begin{aligned} P(X = i) &= \tfrac{i^{\lambda}}{i!}e^{-\lambda},\ i = 0, 1, \ldots, 9 \\ &= \tfrac{i^{6}}{i!}e^{-6} \end{aligned}$$

2. Soit X la variable aléatoire indiquant le fond passif d'investissement, par 1,000DH

   a)

   $$\begin{aligned} E[X] &= \textstyle\sum_i x_i p_i = 50 \\ V(X) &= \textstyle\sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2 = 4375 - 2500 = 1875 \end{aligned}$$

	Investissement:			
Fond passif X	$P[X = x_i]$	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
-25	0.2	-5	625	125
50	0.5	25	2500	1250
100	0.3	30	10000	3000
		$\sum x_i p_i = 50$		$\sum x_i^2 p_i = 4375$

$b)$ On a

$\bullet \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1875} \simeq 43{,}301$
$\bullet E(X) - \sigma_X = 50 - 43,301 = 6,699 \simeq 6,7$
$\bullet E(X) + \sigma_X = 50 + 43,301 = 93,301$

$c)$

$$\begin{aligned} P[E(X) - \sigma_X \leq X \leq E(X) + \sigma_X] &= P(X \leq E(X) + \sigma_X) - P(X \leq E(X) - \sigma_X \\ &= P(X \leq 93,301) - P(X \leq 6{,}7) \\ &= P(X = 50) + P(X = -25) - P(X = -25 \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$d)$ Soit P le portefeuille investi en fond passif X telque $P = 40\,\%X$.
Il vient que

$$E[P] = E[40\,\%X] = 40\,\%E[X] = 0{,}4 \times 50 = 20$$

La valeur espérée de ce portefeuille est de 20000DH.