Filière Sciences économiques et gestion
2013 - 2014
Semestre 3

Module Méthodes quantitatives IV
Algèbre II

Solution des exercices

05 Mars 2014

Exercice 1. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$. A n'est pas un espace vectoriel car

$(0{,}2, 0{,}7) \in A$ et $(0{,}2, 0{,}6) \in A$ mais $(0{,}2, 0{,}7) + (0{,}2, 0{,}6) = (0{,}4, 1{,}3) \notin A$.

Exercice 2. Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a2 & 0 \\ 0 & b + b2 \end{pmatrix} \in B.$
2. $k. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k * a & 0 \\ 0 & k * b \end{pmatrix} \in B$ on peut vérifier facilement 3) 4) et 5).
3.
4.
5.
6. $\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & b3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & b3 \end{pmatrix} \right).$
7. $(a * b). \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} = a. \left(b. \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} \right).$
8. $\alpha. \left(\begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} \right) = \alpha. \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} + \alpha. \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix}$
9. $(x + y). \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + y. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
10. $1. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Exercice 3. $P = \{1 + ax + bx^2,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel car

$1 + x + x^2 \in P$ et $1 + 2x + x^2 \in P$ mais $(1 + x + x^2) + (1 + 2x + x^2) = 2 + 3x + 2x^2 \notin P$.

Exercice 4. $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base.

Exercice 5.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},\ a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R},\ a + e + i = 0 \right\}$$

est un espace vectoriel car

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ d1 & e1 & f1 \\ g1 & h1 & i1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a1 & b + b1 & c + c1 \\ d + d1 & e + e1 & f + f1 \\ g + g1 & h + h1 & i + i1 \end{pmatrix} \in A$ puisque $a + a1 + e + e1 + i + i1 = (a + e + i) + (a1 + e1 + i1) = 0 + 0 = 0$.
- $\alpha. \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * a & \alpha * b & \alpha * c \\ \alpha * d & \alpha * e & \alpha * f \\ \alpha * g & \alpha * h & \alpha * i \end{pmatrix} \in A$ car $\alpha * a + \alpha * e + \alpha * i = \alpha * (a + e + i) = 0$.

Exercice 6. Non, ce n'est pas un espace vectoriel car $det \left(7. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 7 * 1 \neq 1$.

Exercice 7.

- S est un e.v.
- U n'est pas un e.v.
- T est un e.v.

Exercice 8.

a) Le plan des vecteurs avec première composante nulle ($b_1 = 0$) est un e.v.

b) Le plan des vecteurs avec seconde composante nulle ($b_2 = 0$) est un e.v.

c) !!!

d) Le vecteur $b = (0, 0, 0)$ est un e.v.

e) Les vecteurs $b = (b_1, b_2, b_3)$ avec $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$ est un e.v.

Exercice 9. $a.(1,1,2)+b.(1,2,1)+c.(3,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+b+3c & = & 0 \\ a+2b+c & = & 0 \\ 2a+b+c & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow a = b = c = 0$. ces vecteurs suivants sont linéairement indépendants.

Exercice 10. $det(T) = a.e.i = 0$ lorsque n'importe quel element de la diagonale de T est nul. on peut aussi le démontrer en terme d'indépendence linéaire.

Exercice 11.

Exercice 12.

- L'espace de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont la somme de ses composantes est zero:
  $= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\right\} = \{(-y - z - t, y, z, t)\}$.
  $(-y-z-t, y, z, t) = (-y, y, 0, 0) + (-z, 0, z, 0) + (-t, 0, 0, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$.
  dim=3.

Exercice 13. $\alpha_1\{(2, 1, 4, 4) + \alpha_2(-1, 3, -4, 3) + \alpha_3(4, 2, -3, 3) + \alpha_4(6, 4, 2, 4) = (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 & = & 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 & = & 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 4\alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Donc ils sont lineairement indépendants.

$B = \{(2, 1, 4, 4), (-1, 3, -4, 3), (4, 2, -3, 3), (6, 4, 2, 4)\}$ est une base. dim =4.

Exercice 14.

1. $E \oplus F = \{(x, x, x)\} \oplus \{(0, 0, t)\} = \{(x, x, t)\}$
2. $E \oplus F = \{(0, 0, t)\} \oplus \{(x, x, t')\} = \{(x, x, t'')\}$

Exercice 15. On vérifie facilement que E est una sous espace vectoriel. Puisque

$$\begin{pmatrix} 3a+2b & a \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ b & -b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

on a $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ forme une base de E.

$A = a\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ implique que $\left\{\begin{array}{rcl} 3a+2b & = & 4 \\ a & = & 2 \\ b & = & -1 \\ a-b & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow a = 2 \quad \text{et} \quad b = -1.$

Exercice 16. Les vecteurs de B_1 sont lineairement indépendants:

$$\alpha(1+x+2x^2)+\beta(3-x)+\gamma(2x+x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+3\beta &= 0 \\ \alpha-\beta+2\gamma &= 0 \\ 2\alpha+\gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

$$x=\alpha(1+x+2x^2)+\beta(3-x)+\gamma(2x+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+3\beta &= 0 \\ \alpha-\beta+2\gamma-1 &= 0 \\ 2\alpha+\gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma)=(-3/8,1/8,3/4).$$

$$x^2=\alpha(1+x+2x^2)+\beta(3-x)+\gamma(2x+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+3\beta &= 0 \\ \alpha-\beta+2\gamma &= 0 \\ 2\alpha+\gamma-1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma)=(3/4,-1/4,-1/2).$$

x^3 n'appartient pas a l'espace engendré par B_1.

Exercice 17. $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha,\beta,\gamma\cdots.$

Exercice 18. On considere le sous espace vectoriel V de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques de trace nulle.

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \;/\; a+b+c=0\right\}.$$

$$A \in V \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} -b-c & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+ f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de V est

$$B=\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 19.

Exercice 20. Soient $A=\{a+bx^2+cx^4\}$ et $B=\{a+bx+cx^3+dx^5\}$.

$(a+bx^2+cx^4)+(a1+b1x^2+c1x^4)=(a+a1)+(b+b1)x^2+(c+c1)x^4 \in A.$

$\alpha*(a+bx^2+cx^4)=((\alpha*a)+(\alpha*b)x^2+(\alpha*c)x^4) \in A.$

$\{1,x^2,x^4\}$ est une base de A.

$\{1,x,x^3,x^5\}$ est une base de B.

Exercice 21. $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$ c.a.d. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{b-c}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

1. $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})=S_2(\mathbb{R})\oplus A_2(\mathbb{R})$.
2. non.
3. non.
4. non.

Exercice 1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 2x - 3(1) + 0(0) = 3 \to 2x = 6 \to x = 3 \\ y = 1 \\ -5z = 0 \to z = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.

- $\varnothing$.
- $\{(w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}$.
- $(1/2, 1/2, 1/2)$.

Exercice 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & a & 5 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & a & 5 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -30+3a & -6c+a \end{pmatrix}$.

- Si $(-30 + 3a) \neq 0 \quad (a \neq 10)$, alors $Rang(A) = Rang(Ab) = 3 \Rightarrow$ Système compatible déterminé.
- Si $a = 10$.
  - Si $(-6c + a) \neq 0 \quad (c \neq \frac{5}{2})$ alors $Rang(A) = 2, Rang(Ab) = 3 \Rightarrow$ Système incompatible.
  - Si $c = \frac{5}{2}$ alors $Rang(A) = 2 = Rang(Ab) < 3 \Rightarrow$ Système indeterminé.

Exercice 4. on a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & a+1 & b+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & a-2 & b-3 \end{pmatrix}$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow rg(A) = rg(Ab) = 3 \Rightarrow$ systéme compatible determiné.
- Si $a = 2$
  - Si $b \neq 3 \Rightarrow rg(A) = 2, \ rg(Ab) = 3 \Rightarrow$ système incompatible.
  - Si $b = 3 \Rightarrow rg(A) = 2, rg(Ab) = 2 < 3 \Rightarrow$ système compatible indeterminé.

Exercice 5. ERREURE

Exercice 6. Soient x, y et z les quantités que possede les joueurs J_x, J_y et J_z au début du jeu.

J_x a perdu le premier match:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \leftarrow & x - y - z \\ y_1 & \leftarrow & 2y \\ z_1 & \leftarrow & 2z \end{array}$$

J_y a perdu le deuxième match:

$$\begin{array}{lcl} x_2 & \leftarrow & 2(x - y - z) \\ y_2 & \leftarrow & 2y - (x - y - z + 2z) = -x + 3y - z \\ z_2 & \leftarrow & 2(2z) \end{array}$$

J_z a perdu le troixième match:

$$\begin{array}{lcl} x_3 & \leftarrow & 4(x - y - z) \\ y_3 & \leftarrow & 2(-x + 3y - z) \\ z_3 & \leftarrow & 4z - (2(x - y - z) + (-x + 3y - z)) = -x - y + 7z \end{array}$$

Maintenant on resoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} 4(x-y-z) & = & c \\ 2(-x+3y-z) & = & c \\ -x-y+7z & = & c \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z)=(\frac{13}{8}c, \frac{7}{8}c, \frac{1}{2}c).$

Exercice 7.

1. Les prix d'equilibre sont:
$$\left\{\begin{array}{rcl} 10-x+3y-z & = & 12+x \\ 6+x-3y+3z & = & 4+3y \\ 10+3x+3y-z & = & 12+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} -2x+3y-z & = & 2 \\ x-6y+3z & = & -2 \\ 3x+3y-2z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z)=(1,3,5).$$
2. Les quantités d'equilibre sont
$$\begin{array}{rl} Q_{dA}=10-1+3(3)-5=13 & \cdots \\ Q_{oA}=12+1=13 & \cdots \end{array}$$

Exercice 8.

1. $$\left\{\begin{array}{lrcl} (A) & 200{,}000b_1+100{,}000(b_2+b_3) & = & 60{,}000 \\ (B) & 50{,}000(b_1+b_2+b_3) & = & 20{,}000 \\ (C) & 100{,}000b_1+60{,}000(b_2+b_3) & = & 40{,}000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 20b_1+10(b_2+b_3) & = & 6 \\ 5(b_1+b_2+b_3) & = & 2 \\ 10b_1+6(b_2+b_3) & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow S=\phi.$$
2. $$\left\{\begin{array}{lrcl} (A) & 200{,}000b_1+100{,}000(b_2+b_3) & = & 60{,}000 \\ (B) & 50{,}000(b_1+b_2+b_3) & = & 20{,}000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 20b_1+10(b_2+b_3) & = & 6 \\ 5(b_1+b_2+b_3) & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$S=\{(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}-t, t): \quad t\in\mathbb{R}\}.$
3. $$\left\{\begin{array}{lrcl} (A) & 200{,}000b_1+100{,}000(b_2+b_3) & = & 60{,}000 \\ (B) & 50{,}000(b_1+b_2+b_3) & = & 20{,}000 \\ (C) & 100{,}000b_1+60{,}000(b_2+b_3) & = & c*10{,}000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 20b_1+10(b_2+b_3) & = & 6 \\ 5(b_1+b_2+b_3) & = & 2 \\ 10b_1+6(b_2+b_3) & = & c \end{array}\right..$$
$$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 2 \\ 10 & 6 & 6 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 6 \\ 0 & -10 & -10 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2c+6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 6 \\ 0 & -10 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10c-32 \end{pmatrix}.$$
Le système est compatible si et seulement si $c=3{,}2$.

Ainsi, le benefice reél de l'investisseur (C) est 32.000 dhs.

Exercice 9.

1. Soient
x : le nombre d'unités du produit A
y : le nombre d'unités du produit B
z : le nombre d'unités du produit C.
on a:
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y+2z & = & 850 \\ x+2y+4z & = & 1200 \\ 2x+y+z & = & 550 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z)=(100,150,200).$$
2. $$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y+2z & = & 1200 \\ x+2y+4z & = & 900 \\ 2x+y+z & = & 1100 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y,z)=(300,700,-200).$$
Donc, on ne peut pas utiliser tout le temps disponible des machines.

Exercice 10.

Exercice 1.On considère le cas particulier $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A.B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieuere. Démontrons ceci dans le cas générale.

Soit $A = [a_{i,j}]_{i=1,n,\ \ j=1,n}$ une matrice triangulaire supérieuere, Ceci veut dire que la structure de la matrice A est définie par $(a_{i,j} = 0 \quad \text{si} \ \ i > j)$.

Soit C le produit de deux matrices $n \times n$ triangulaire supérieure. Montrons que $(c_{i,j} = 0 \quad \text{si} \ \ i > j)$.

Pour $i > j$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 * b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} * 0 = 0.$$

Ainsi la matrice C est bien triangulaire supérieure.

Exercice 2. $(A.A^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T$. Donc cette matrice est symétrique.

Exercice 3. Démontrons que $A.B$ est symétrique $\Leftrightarrow A$ et B commutent.

(⇒) $A.B = (A.B)^T = B^T.A^T = B.A$

(⇐) $(A.B)^T = B^T.A^T = B.A = A.B$

Exercice 4. $(B^T.A.B)^T = -B^T.A.B$??

$(B^T.A.B)^T = B^T.A^T.B = -B^T.A.B$.

Exercice 5. $A^{-1}(AB^{-1} + A)B - (B(AB)^{-1}A)^{-1} = I + B - (BB^{-1}A^{-1}A)^{-1} = B$.

Exercice 6.

Exercice 7.

1. A est une matrice orthogonale $\Leftrightarrow AA^T = A^TA = I$.
   $1 = \det(AA^T) = \det(A) * \det(A^T) = \det(A) * \det(A) = \det(A)^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 12 \neq \pm 1$. Donc A n'est pas orthogonale.

Exercice 8.

Exercice 9. $B^2 = (I - A).(I - A) = I - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A = B$.

$AB = A(I - A) = A - A^2 = (I - A).A = BA$.

Exercice 10. $I - A$ admet une inverse $I + \lambda A \Leftrightarrow (I - A).(I + \lambda A) = I$.

$(I - A).(I + \lambda A) = I + \lambda A - A - \lambda A^2 = I + \lambda A - A - n\lambda A = I + (\lambda - 1 - \lambda n)A$

$(I - A).(I + \lambda A) = I \Leftrightarrow (\lambda - 1 - \lambda n)A = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1 - \lambda n) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-n}$.

Exercice 11.

1. $\det(A) = a_2 * a_3 * \cdots * a_n$.
2. $\det(B) = n * 1 * 2 * \cdots * (n - 1) = n!$.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15. Cherchons les coordonnées de $(0,1)$ dans la base $B = \{(2,-1),(4,1)\}$.

$(0,1) = x(2,-1) + y(4,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+4y & = & 0 \\ -x+y & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$

$(1,0) = x(2,-1) + y(4,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+4y & = & 1 \\ -x+y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}).$

$f(0,1) = -\frac{2}{3}f(2,-1) + \frac{1}{3}f(4,1) = \left(0, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right).$

$f(1,0) = \frac{1}{6}f(2,-1) + \frac{1}{6}f(4,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Soit $f: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que:

$$f(1,1,0) = (0,0) \quad f(0,1,1) = (1,0) \quad f(0,0,1) = (1,1).$$

1. Déterminons $f(1,0,0)$ $f(0,1,0)$ *et* $f(0,0,1)$.
   Puisque $(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)$, $\quad (0,1,0) = (0,1,1) - (0,0,1)$
   alors $f(1,0,0) = (0,0) - (1,0) + (1,1) = (0,1)$ $f(0,1,0) = (1,0) - (1,1) = (0,-1)$ *et* $f(0,0,1) = (1,1)$.
   $f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = x(0,1) + y(0,-1) + x(1,1) = (z, x-y+z)$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = y \end{array} \right.$
   $Ker(f) =< (1,1,0) >$
   $Im(f) =< (0,-1),(1,1) >$.

4. $f(x,y,z) = (0,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = 0 \\ x = y+1 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y,z) \in E = \{(y+1,y,0): \ y \in \mathbb{R}\}.$
   E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 1.

1. f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = 0$.

   $X \in Ker(f) \Leftrightarrow f(X) = f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $Ker(f) = \{(0,0,0)\} \Leftrightarrow rang(A) = 3$.

   $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+a \\ 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+a \\ 0 & -5 & -3-4a \\ 0 & 0 & -2-4a \end{pmatrix}$. $Rang(A) = 3 \Leftrightarrow a \neq -1/2$.

   Ainsi, f est injective si et seulement si $a \neq -1/2$.

2. $Im(f) = \left\{ y = f(x) : x \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

   $y \in Im(f) \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 1+a \end{pmatrix}$.

- Si f est injective ($a \neq -1/2$): $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 1+a \end{pmatrix} \right\}$ est une base.
- Si f n'est pas injective, $Rang(A) = 2$ et $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ est une base.

Exercice 2.

1. $f(u_1) = f(u_1 + u_2) - f(u_2) = (2, -2, 1) - (-2, 2, -1) = (4, -4, 2)$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. on a:
   - $u_1 + u_2 = (3, 0) \Rightarrow e_1 = \frac{1}{3}(u_1 + u_2)$.
   - $2u_1 - u_2 = (2, -2) - (2, 1) = (0, -3) \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{3}(2u_1 - u_2)$.
   - $f(e_1) = \frac{1}{3} f(u_1 + u_2) = (2/3, -2/3, 1/3)$.
   - $f(e_2) = -\frac{1}{3} f(2u_1 - u_2) = -\frac{2}{3} f(u_1) + \frac{1}{3} f(u_2) = -\frac{2}{3}(4, -4, 2) + \frac{1}{3}(-2, 2, -1) = (\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{-5}{3})$.

   Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

3. $X \in Ker(f) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 5y \Leftrightarrow (x, y) = (5t, t) = t(5, 1)$

   $Ker(f) =< (5, 1) >$.
   $dimKer(f) + dimIm(f) = 2 \Rightarrow dimIm(f) = 1$.
   $Im(f) =< (2, -2, 1) >$.

Exercice 3. Non.

Exercice 4. Soit $P_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou egale á trois.

1. $\alpha+\beta x+\gamma(x^2-x)+\delta(x^3-3x^2+2x)=0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0.$
2. - $f(p(x)+q(x))=f((p+q)(x))=(p+q)(x+1)+(p+q)(x)=p(x+1)+q(x+1)-p(x)-q(x)=f(p(x))+f(q(x))$
   - $f(\alpha p(x))=\alpha f(p(x))$.
   - $p\in Kerf(f) \Leftrightarrow f(p(x))=p(x+1)-p(x)=0 \Leftrightarrow p(x+1)=p(x).$

Exercice 5. $\begin{pmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix}.$

$Det(A)=-0{,}036\neq 0 \Rightarrow Ker(f)=\{(0,0,0)\}.$

$dimIm(f)=3 \Rightarrow Im(f)=R^3.$

Exercice 6.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x=(w,i,t) & \mapsto & p=(p_a,p_b,p_c) \end{array}$
   - $f(1,0,0)=(2,\frac{3}{2},2)$
   - $f(0,1,0)=(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1)$
   - $f(0,0,1)=(1,1,\frac{3}{2})$.

   $$A=\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

   $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x=(w,i,t) & \mapsto & f(x)=(2w+\frac{3}{2}i+t,\frac{3}{2}w+\frac{3}{2}i+t,2w+i+\frac{3}{2}t) \end{array}$
2. $$\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 29 \\ 25 \\ 33 \end{pmatrix}.$$
3. $\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ i \\ t \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y,z)=(0,0,0).$

   Ainsi on ne peut pas maintenir les prix des trois secteurs d'une année a une autre, sans qu'ils se maintiennent a la fois, les salaires, les prix d'importation et la pression fiscale.

Exercice 7.

1. $f(u_1-u_2)=0 \Rightarrow f(u_1)=f(u_2)$.

   $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. $A.B=B.A=A$
3. $X\in Ker(f) \Leftrightarrow AX=0 \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-y-z.$

   $(x,y,z))=(-y-z,y,z)=(-y,y,0)+(-z,0,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1).$

   Une base de Ker(f) est B=$\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.
4. $Ker(f)\neq\{0\} \Rightarrow f$ n'est pas injective.

   $dimKer(f)+dimIm(f)=3 \Rightarrow dimIm(f)=1\neq 3$, donc f n'est pas surjective.

Exercice 8. on a:

- $E = E_1 \oplus E_2$
- $Ker(f) = E_1$.

Démontrons que $f(E) = f(E_2)$.

($\subsetneqq$) Soit $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) \Rightarrow f(E) \subsetneqq f(E_2)$.

($\supsetneqq$) Soit $x_2 \in E_2 \Rightarrow f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) = f(x)$ avec $x \in E \Rightarrow f(E_2) \subsetneqq f(E)$.

Exercice 9.

Exercice 10.

1.
   - $f(u_1) = u_1 + u_2$.
   - $f(u_1) + f(u_2) = u_1 + 2u_2 + u_2$.
   - $f(u_2) = (u_1 + 2u_2 + u_2) - (u_1 + u_2) = u_2 + u_3$. $\quad f(u_3) = 0$.

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $\quad X \in Ker(f) \Leftrightarrow (x, y, z) = z(0, 0, 1)$. $Ker(f) =< (0, 0, 1) >$.

2. Soit $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$. $\quad f(v) = v \Leftrightarrow Av = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \beta(0, 1, 1)$.
   Ainsi $S =< (0, 1, 1) >$.

3. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11.

1. Soit A la matrice associée a f dans la base $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. Si A est non regulière, alors $det(A) = 0 \Rightarrow rang(A) < n \Rightarrow \{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)\}$ sont linéairement dépendants. Absurde.

2. A est régulière donc $rang(A) = n$ et par suite $dimKerf = 0$ c.a.d $Ker(f) = \{0\}$, et par consequence f est injective. Elles est aussi surjective.