Filière Sciences économiques et gestion
2013 - 2014
Semestre 2
Algèbre II

Exercices

15 février 2021

Prof. Hossain O. Yakhlef
Université Abdelmalek Essaadi.
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales Tétouan.
Département de Sciences Economiques et Gestion

Exercice 1. Déterminer si l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 2. Déterminer si l'ensemble des matrices diagonal 2×2 $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R}\right\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 3. Déterminer si l'ensemble des polynômes $\{1+ax+bx^2,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 4. Déterminer si l'ensemble des matrices symétriques 2×2 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ est un espace vectoriel. Dans le cas affirmatif, donner une base.

Exercice 5. Déterminer si l'ensemble des matrices de trace nulle 3×3

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},\ a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R},\ a+e+f=0\right\}$$

est un espace vectoriel.

Exercice 6. Déterminer si l'ensemble des matrices 2×2 avec déterminant égale a 1

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1\right\}$$

est un espace vectoriel.

Exercice 7. Trouver parmi les ensembles suivants, ceux qui sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$S=\{(r,s,t): r+s+t=0\}, \qquad T=\{(s,2s,s+t):\ s,t\in\mathbb{R}\},$$
$$U=\{(1+s,2s,s+t):\ s,t\in\mathbb{R}\}.$$

Exercice 8. Determiner parmi les sous ensembles de $\mathbb{R}^3$, ceux qui sont des sous espaces vectoriels:

a) Le plan des vecteurs avec première composante nulle ($b_1=0$).

b) Le plan des vecteurs avec seconde composante nulle ($b_2=0$).

c) Les vecteurs $b=(b_1,b_2,b_3)$ avec $b_1 * b_2 = 0$, c'est à dire, l'union de deux sous espaces: le plan $b_1=0$ et le plan $b_2=0$.

d) Le vecteur $b=(0,0,0)$.

e) Les vecteurs $b=(b_1,b_2,b_3)$ avec $b_3-b_2+3b_1=0$.

Exercice 9. Verifier si les vecteurs suivants sont linéairement dépendants ou indépendants: $\{(1,1,2),(1,2,1),(3,1,1)\}$.

Exercice 10. Démontrer que si n'importe quel élément de la diagonale $T=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ est nul, les lignes sont des vecteurs linéairement dépendants.

Exercice 11. Trouver un contre exemple de l'affirmation suivante: Si v_1,v_2,v_3,v_4 est une base de $\mathbb{R}^4$, et si W est un sous espace, alors un sous ensembles formé par des vecteurs v_i est une base de W.

Exercice 12. Trouver la dimension de:

- L'espace de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont la somme de ses composantes est zero.
- L'espace de tous les matrices 4×4 de trace nulle.
- L'espace de tous les matrices 3×3 symétriques.

Exercice 13. Trouver la dimension et une base du sous espace de $\mathbb{R}^4$ dont le système génératrice est $\{(2,1,4,4),(-1,3,-4,3),(4,2$

Exercice 14. Determiner la somme directe des sous espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants:

1. La droite $\{(x, y, z),\ \ x = y = z\}$ et la droite $\{(x, y, z),\ \ x = y = 0\}$.
2. La droite $\{(x, y, z),\ \ x = y = 0\}$ et le plan $\{(x, y, z),\ \ x = y\}$.

Exercice 15. Démontrer que

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + 2b & a \\ b & a - b \end{pmatrix} :\ \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Trouver la dimension de E et donner une base. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. A appartient il a E ?. Dans le cas affirmatif, trouver les coordonnés de A dans cette base.

Exercice 16. Verifier si $B_1 = \left\{1 + x + 2x^2, 3 - x, 2x + x^2\right\}$ et $B_2 = \left\{-1 + 2x + x^2, 3 - x^2, 1 + x + 2x^2\right\}$ sont des bases de l'espace vectoriel des polynômes de degré 2. Trouver les coordonnés des vecteurs $x,\ \ x^2$ et x^3 dans la base B_1.

Exercice 17. Verifier si les vecteurs de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendants ou non.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Calculer la dimension du sous espace de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques de trace nulle. Donner une base. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent elles a ce sous espace vectoriel?. Dans le cas affirmatif, donner leurs coordonnées dans la base calculée antérieurement.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble des matrices $n \times n$ unitaires: $\left\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \ A.A^T = I_n\right\}$. Cet ensemble constitue il un sous espace vectoriel?.
Même question pour l'ensemble des matrices $n \times n$ antisymétrique: $\left\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \ A = -A^T\right\}$. Dans le cas affirmatif, quel est sa dimension?.

Exercice 20. Étant donné l'ensemble des polynômes paires de degré inférieur ou égale à 4: $\left\{a + bx^2 + cx^4\right\}$. Cet ensemble constitue il un sous espace vectoriel?.
Même question pour l'ensemble des polynômes impaires de degré inférieur ou égale à 5. Dans le cas affirmatif, donner une base.

Exercice 21. On considère $S_2(\mathbb{R}) = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}),\ \ A = A^T\right\}$ le sous espace vectoriel formé par des matrices symétriques, et $A_2(\mathbb{R}) = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}),\ \ A = -A^T\right\}$ le sous espace vectoriel formé par des matrices antisymétriques. Prouver si les affirmations suivantes sont vrais ou non:

1. La somme directe de $S_2(\mathbb{R})$ et $A_2(\mathbb{R})$ est $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
2. La somme directe de $S_2(\mathbb{R})$ et $A_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
3. La somme directe de $S_2(\mathbb{R})$ et $A_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques ou antisymétriques.
4. La somme directe de $S_2(\mathbb{R})$ et $A_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques.

Exercice 1. Utiliser l'elimination du Gauss pour résoudre le système

$$\begin{cases} 2u - 3v &= 3 \\ 4u - 5v + w &= 7 \\ 2u - v - 3w &= 5 \end{cases}$$

Exercice 2. Étudier les systèmes suivants

$$\begin{cases} v - w &= 2 \\ u - v &= 2 \\ u - w &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v - w &= 0 \\ u - v &= 0 \\ u - w &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v + w &= 1 \\ u + v &= 1 \\ u + w &= 1. \end{cases}$$

Exercice 3. Étudier l'existence et l'unicité de la solution du système $Ax = B$ en fonction des paramètres a et c où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \\ 0 & a & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Étudier l'existence et l'unicité de la solution du système $Ax = B$ en fonction des paramètres a et b où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Trois amies décident de créer une entreprise en apportant respectivement x, y, z u.m. chacune. Ces quantités sont soumise aux relations suivantes:

- La somme des trois capitaux doit être égale aux capitaux apportés par la première et la troisième et, est égale a 2 u.m.
- Le double de la quantité apportée par la première, plus la quantité apportée par la deuxième, plus une certaine proportion du capital apporté para la troisième, doit être égale au double de la somme des trois capitaux.

On demande:

1. Le plan a été présenté par une des trois amies. Laquelle? (Justifier votre réponse).
2. quel est la valeur du facteur de z, si on veut avoir une solution unique.

Exercice 6. Trois joueurs de football se sont mis d'accord pour jouer trois matchs et que, celui qui perds doit rembourser aux autres deux joueurs, une quantité égale a la que possède chacun non perdant a ce moment. Chaque joueur a perdu une partie, et qu' a la fin du jeu, les trois joueurs possèdent la même quantité C. Déterminer la quantité que possède chaque joueur au début du jeu en étudiant le compatibilité du système.

Exercice 7. Le comportment du marché pour trois produits A, B et C est donné par les fonctions d'offre et de demande suivantes:

$$\begin{array}{lll} Q_{dA} = 10 - x + 3y - z, & Q_{dB} = 6 + x - 3y + 3z, & Q_{dC} = 10 + 3x + 3y - z; \\ Q_{oA} = 12 + x, & Q_{oB} = 4 + 3y, & Q_{oC} = 12 + z; \end{array}$$

où x et z sont les prix unitaires des produits A, B et C, respectivement.
Déterminer les prix et les quantités d'équilibre (offre est égale au demande).

Exercice 8. Soit (b_1, b_2, b_3) le benefice ou (perte) obtenu pour chaque Dirham inverti dans trois valeurs boursière durant une certaine période du temps. Un investisseur A affirme avoir obtenu un benefice total de 60.000 dhs, pour un inversion de 200.000 dhs dans la première valeur et de 100.000 dhs dans les autres deux valeurs. Autre investisseur B déclare un benefice total de 20.000 dhs, pour une inversion de 50.000 dhs dans chaque valeur. Finalement, C déclare 40.000 dhs de benefice total et une inversion de 100.000, 60.000 et de 60.000 dhs respectivement dans chaque valeur. On demande:

1. Démontrer qu' un des trois investisseurs ne dit pas la vérité.
2. On suppose que la déclaration C est fausse. Que peut on dire des benefices b_1, b_2, b_3?
3. Si C a menti seulement dans le benefice total obtenu, mais son déclaration d'inversion est vrai. Quel est réellement le benefice de C dans l'operation.

Exercice 9. Une entreprise fabrique trois produits A, B et C. Tous sont passés par trois processus qui se réalisent dans trois machines M_1, M_2, et M_3. Le temps (exprimé en heure) nécessaire pour la fabrication d'une unité de chaque produit dans chacune des trois machines est donné par:

Produit A: 3h dans M_1, 1h dans M_2, 2h dans M_3.
Produit B: 1h dans M_1, 2h dans M_2, 1h dans M_3.
Produit C: 2h dans M_1, 4h dans M_2, 1h dans M_3.

1. On dispose de la machine M_1 durant 850 heures, de la machine M_2 durant de 1.200 heures, et de la machine M_3 durant 550 heures. Combien d'unité de chaque produit on peut fabriquer dont le but est d'utiliser tout le temps disponible par les trois machines?
2. On suppose qu'on dispose des machines M_1, M_2 et M_3 durant 1.200, 900 et 1.100 h respectivement. Que se passe t il dans ce cas?.

Exercice 10. Pour la construction d'une usine, on a besoin d'une unité de fer, mais aucune unité de bois, et pour la construction d'un appartement, on a besoin une unité de chaque materiel. Pour la construction d'une tour, on a besoin de quatre unité de fer et une unité de bois. Si on a en reserve 14 unités de fer et 4 unités de bois, on demande:

- Combien d'usines, appartements, et tours, pouvons nous construire pour utiliser toute la reserve.
- Sachant que le prix de l'usine est de 6 u.m., et de l'appartement est de 2 u.m., et de la tour est de 4 u.m., quelle est la combinaison dont le prix est 36 u.m.

Exercice 1. Prouver que le produit de deux matrices $n \times n$ triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. Est t - il vrai que le produit de deux matrices $n \times n$ triangulaire est une matrice triangulaire?.

Exercice 2. Démontrer que pour toute matrice A, le produit AA^T est une matrice symétrique.

Exercice 3. Démontrer que le produit de deux matrices carré de même ordre symétrique, est une matrice symétrique si et seulement si, les deux matrices commutent.

Exercice 4. Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $m \times m$ et B une matrice d'ordre $m \times m$. La matrice $B^T AB$ est elle antisymétrique?.

Exercice 5. Simplifier l'expression matricielle suivante:

$$A^{-1}(AB^{-1} + A)B - (B(AB)^{-1}A)^{-1}.$$

Exercice 6. Démontrer que si les matrices A et B commutent, et A est une matrice régulière, alors A^{-1} et B commutent aussi.

Exercice 7. Quel valeur peut prendre le determinant d'une matrice orthogonale?. Est-elle orthogonale la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}?.$$

Exercice 8. Pour produir 1 Kg. de patate on a besoin de 0.01 Kg. d'engrais phosphatés et de 0.02 Kg. d'angrais nitreux. Pour produir 1 Kg. de patate douce on necessite 0.03 Kg. d'engrais phosphatés et 0.04 Kg. d'angrais nitreux. D'autre part, pour la production du fourrage pour le cochon on utilise 0.5 Kg. de patate et de 0.3 Kg. de patate douce. Cependant pour l'elaboration du fourrage pour l'âne on necessite 0.2 Kg. de patate et de 0.6 Kg. de patate douce.

Montrer sous forme matricielle la relation - utilisation des ressources dans les deux processus et trouver la matrice qui relie le fourrage et l'engrais.

Exercice 9. Une matrice carré est idempotente si $A^2 = A$. Démontrer que si A est idempotente, alors $B = I - A$ est aussi idempotente et que les matrices A et B commutent.

Exercice 10. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice d'ordre $n \times n$ $(n > 1)$ tel que $a_{i,j} = 1$ $\forall i, j$. Démontrer que la matrice $I - A$ admet une matrice inverse de la forme $I + \lambda A$ et calculer λ.

Exercice 11. Calculer les determinants suivants:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Exercice 12. Démontrer que le produit de deux matrices orthogonale est une matrice orthogonale.

Exercice 13. Démontrer que si A est une matrice nilpotente d'indice 3, alors

$$(I + A + A^2) = (I - A)^{-1}.$$

Exercice 14. Prouver que deux matrices equivalentes ont la même determinant.

Exercice 15. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire telles que:

$$\begin{array}{rcl} f(2,-1) & = & (1,0,-1,3) \\ f(4,1) & = & (2,-2,3,1). \end{array}$$

1. Trouver la matrice de cette application relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$.
2. Trouver le sous espace vectoriel $Im(f)$ et donner une base.
3. f est-elle une appliaction injective?. f est-elle surjective?. Raisonner votre réponse.

Exercice 16. Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + 2y - 3z).$$

1. Calculer la matrice associée á f relativement aus bases canoniques.
2. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base $\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$, sans varier la base dans $\mathbb{R}^2$. Trouver la nouvelle matrice A' associée á f.
3. On choisit $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{-1}{2})\}$ et on maintient dans $\mathbb{R}^3$ la base qui vient dans (1). Trouver la nouvelle matrice $\tilde{A}$ associée a f.
4. Déterminer le Kerf de cette application en donnant une base. Est - elle injective?. Est - elle surjective?.

Exercice 17. Soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorphisme défini par:

$$f(u_1) = u_1 - u_2, \ \ f(u_2) = 2u_1 + u_2, \ \ f(u_3) = 3u_1 + u_2 - u_3.$$

Déterminer:

1. L'expression matricielle de l'endomorphisme dans la base B.
2. Les dimensions et des bases des sous espaces vactoriel $Im(f)$ et $Ker(f)$.
3. $f(3u_1 - 2u_2)$.

Exercice 18. Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que:

$$\begin{array}{c} (1,1,0) \in Ker(f) \\ f(0,1,1) = (1,0) \\ f(0,0,t) = (t,t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

1. Déterminer $f(x,y,z)$.
2. Trouver la matrice associée á f relativement aus bases canoniques.
3. Trouver une base et la dimension du $Ker(f)$ et $Im(f)$.
4. Trouver l'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur $(0,1)$. Est - il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?.

Exercice 1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée aux bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la valeur (ou les valeures) de a pour que l'endomorphisme f soit injective.
2. Trouver une base du sous espace vectoriel $Im(f)$, dans le cas où f est injective et aussi dans le cas contraire.

Exercice 2. Considerons l'application linéaire $f: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definie par

$$f(u_1 + u_2) = (2, -2, 1), \ \ f(u_2) = (-2, 2, -1); \quad u_1 = (1, -1), \ \ u_2 = (2, 1).$$

On demande:

1. L'expression matricielle de l'application linéaire f relative aux bases $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. L'expression matricielle de l'application linéaire f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le $Ker(f)$ et $Im(f)$ en donnant les dimensions et des bases. f est - elle injective?. f est - elle surjective?.

Exercice 3. Soit $f: \ V \to W$ avec $dimV \neq dimW.f$ peut elle etre bijective?.

Exercice 4. Soit $P_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou egale á trois.

1. Démontrer que $\left\{1, x, x^2 - x, x^3 - 3x^2 + 2x\right\}$ forme une base de $P_3[x]$.
2. Prouver que l'application $f: \ P_3[x] \to P_3[x]$, definie par $f(p(x)) = p(x+1) - p(x) \quad \forall p(x) \in P_3[x]$ est linéaire. Trouver $Ker(f)$ et $Im(f)$.

Exercice 5. On étudie les mouvements des capitaux entre trois pays A, B et C. On définit le solde de la balance des capitaux d'un pays comme la différence entre l'entré des capitaux moins leur sortie. Nous savons que dans chaque pays, la situation dépend du type d'intérêt réel en vigueur. Nous résumons l'interprétation de la manière suivante:

$$\begin{aligned} S_a &= 0{,}4R_a - 0{,}5R_b - 0{,}3R_c \\ S_b &= -0{,}3R_a + 0{,}6R_b - 0{,}4R_c \\ S_c &= -0{,}1R_a - 0{,}1R_b + 0{,}3R_c. \end{aligned}$$

1. Représenter les équations antérieures sous forme matricielle, en justifiant qu'il s'agit d'une application linéaire.
2. Determiner $Im(f)$ et $Ker(f)$. Interpréter le résultat.

Exercice 6. On considère une économie devisé en trois secteurs: agricole, industriel et de services. Soient p_a, p_b et p_c les pourcentages de variation des prix d'une année a une autre dans les secteurs respectives, que nous représentons par un vecteur $p = (p_a, p_b, p_c)$. Soient w le taux de variation des salaires d'une année a une autre, i le taux de variation des prix d'importation dans la même période et t le taux de variation des impôts, que nous agroupons dans le vecteur $x = (w, i, t)$. Nous savons que les composantes du vecteur p dépendent linéairement des composantes du vecteur x, mais nous ignorons la relation concrète qui les relie. Nous savons uniquement qu'une augmentation de $1/100$ sur le taux de variation des salaires, en maintenant constants les prix d'importation et des impôts, provoque que les prix agricoles augmentent de $2/100$, industriels de $1{,}5/100$ et celui du secteur de services de $2/100$, c'est á dire, $f(1,0,0) = (2, 3/2, 2)$. Si l'augmentation concerne les prix d'importation: $f(0,1,0) = (3/2, 3/2, 1)$ et si l'augmentation concerne les prix des impots: $f(0,0,1) = (1, 1, 3/2)$. On demande:

1. La matrice de l'application linéaire qui relie les vecteurs x et p. Donner l'expression explicite de l'application f.
2. On attend que la prochaine année les salaires augmentent de $8/100$, les prix d'importation de $2/100$ et la pression fiscale de $10/100$. Dans quel secteur augmentent plus les prix?.
3. Peut-on maintenir les prix des trois secteurs d'une année a une autre, sans qu'ils se maintiennent a la fois, les salaires, les prix d'importation et la pression fiscale?.

Exercice 7. Soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. On cosnidère les endomorphismes f et g définis par

$$f(u_2) = f(u_3) = u_1 + u_2 + u_3, \quad u_1 - u_2 \in Ker(f);$$
$$g(u_1) = u_2, \;\; g(u_2) = u_3, \;\; g(u_3) = u_1.$$

1. Trouver les matrices associées a f et g dans la base B.
2. Démontrer que f et g communtent.
3. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$ en donnant une base et la dimension.
4. f est elle injective?. f est elle surjective?. g est elle injective?. g est elle surjective?. Raisonner votre réponse.

Exercice 8. Soit $f: \;\; E \to F$ une application linéaire. Supposons que $E = E_1 \oplus E_2$ et que $Ker(f) = E_1$. Démontrer que $f(E) = f(E_2)$. Quelle condition faible peut on supposer pour obtenir la même concluision.

Exercice 9. On suppose que les transactions extérieures d'un pays sont réduites aux biens et services. On dispose des donnés de la balance des biens dont le solde x est le différence entre les exportations et les importations, le solde y est défini de la même manière. Le service des études du Ministère d'Economie a analysé les effets de la variation des prix et taux de change sur les deux soldes:

$$\begin{aligned} x &= z + 2t \\ y &= z + t \end{aligned}$$

où z représente les variations des prix et t représente le taux de change.

1. Pouvons interpréter ce problème comme une application linéaire des vecteurs (z, t) aux vecteurs (x, y)?.
2. Trouver le $Ker(f)$ et l'image de cette application. Donner une interprétation économique.

Exercice 10. Soit V un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de V et $f: \;\; V \to V$ l'application linéaire définie par

$$f(u_1) = u_1 + u_2, \;\; f(u_1 + u_2) = u_1 + 2u_2 + u_3, \;\; u_3 \in Ker(f).$$

1. Déterminer $Ker(f)$ en donnant la dimension et une base.
2. Décrire l'ensemble $S = \{v \in V / f(v) = v\}$
3. Trouver la matrice associée a l'application $f \circ f$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Exercice 11. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avnec la propriètè qu'il transforme un système libre a un autre système libre, c'est a dire:

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_k\} \text{ sont linéairement indépendants}$$
$$\Downarrow$$
$$\{f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_k)\} \text{ sont linéairement indépendants}$$

Démontrer que:

1. La matrice associée á f dans n'importe quelle base est régulière.
2. f est injective.
3. f est surjective.