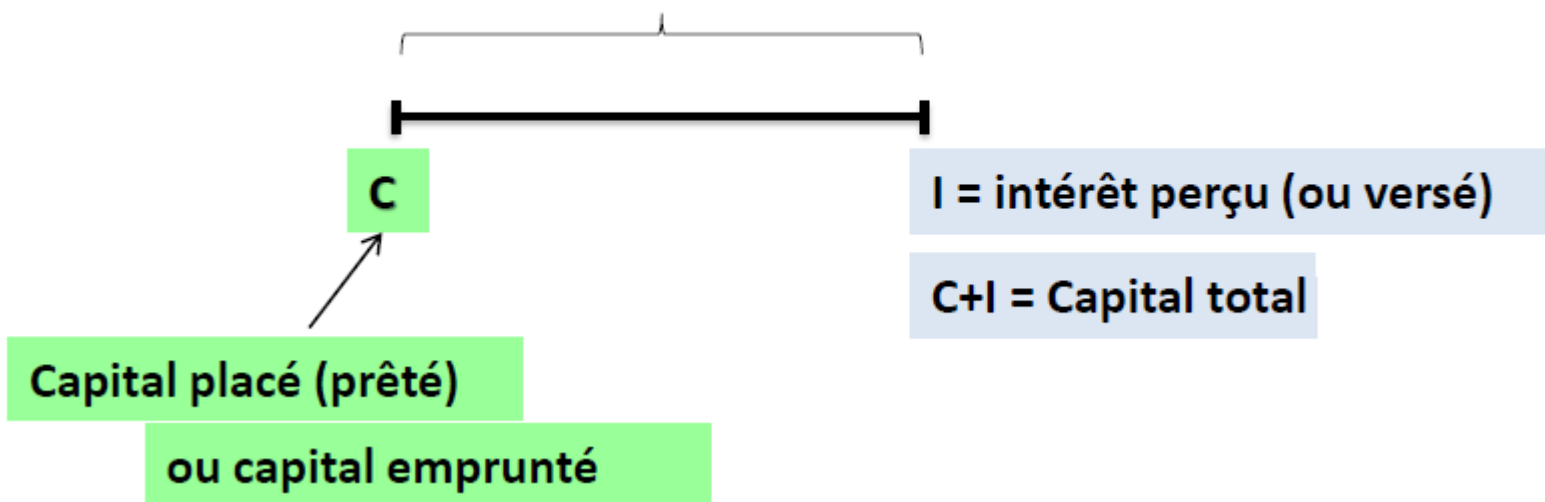


Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

L'intérêt produit en une période

Une période p (1 jour, 1 mois, 1 trimestre, 1 semestre, 1 année)



Définition:

L'intérêt I reçu en une période p est le revenu reçu par le prêteur (ou la dépense versée par l'emprunteur)

L'intérêt I : c'est le loyer ou la rémunération de l'argent

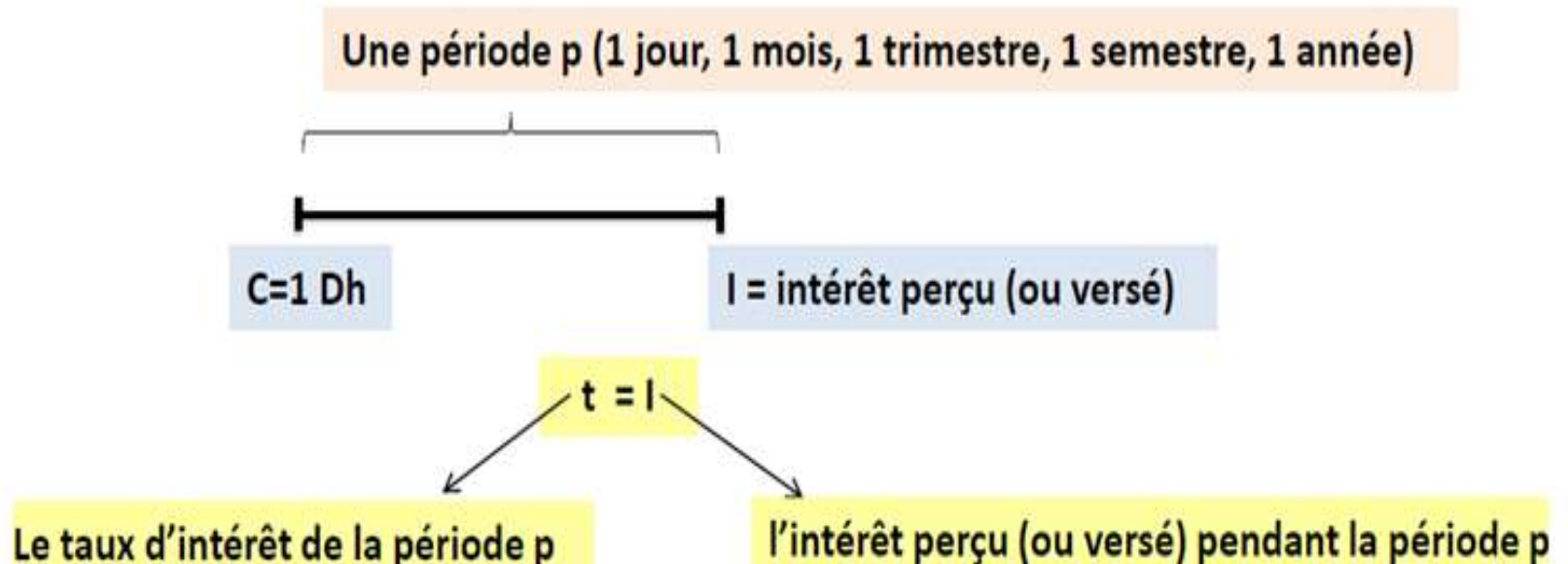
Remarque: L'intérêt peut être post compté (payé -ou reçu- en fin de période) ou pré compté (payé -ou reçu- en début de période)

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

le taux d'intérêt d'une période p

Définition:

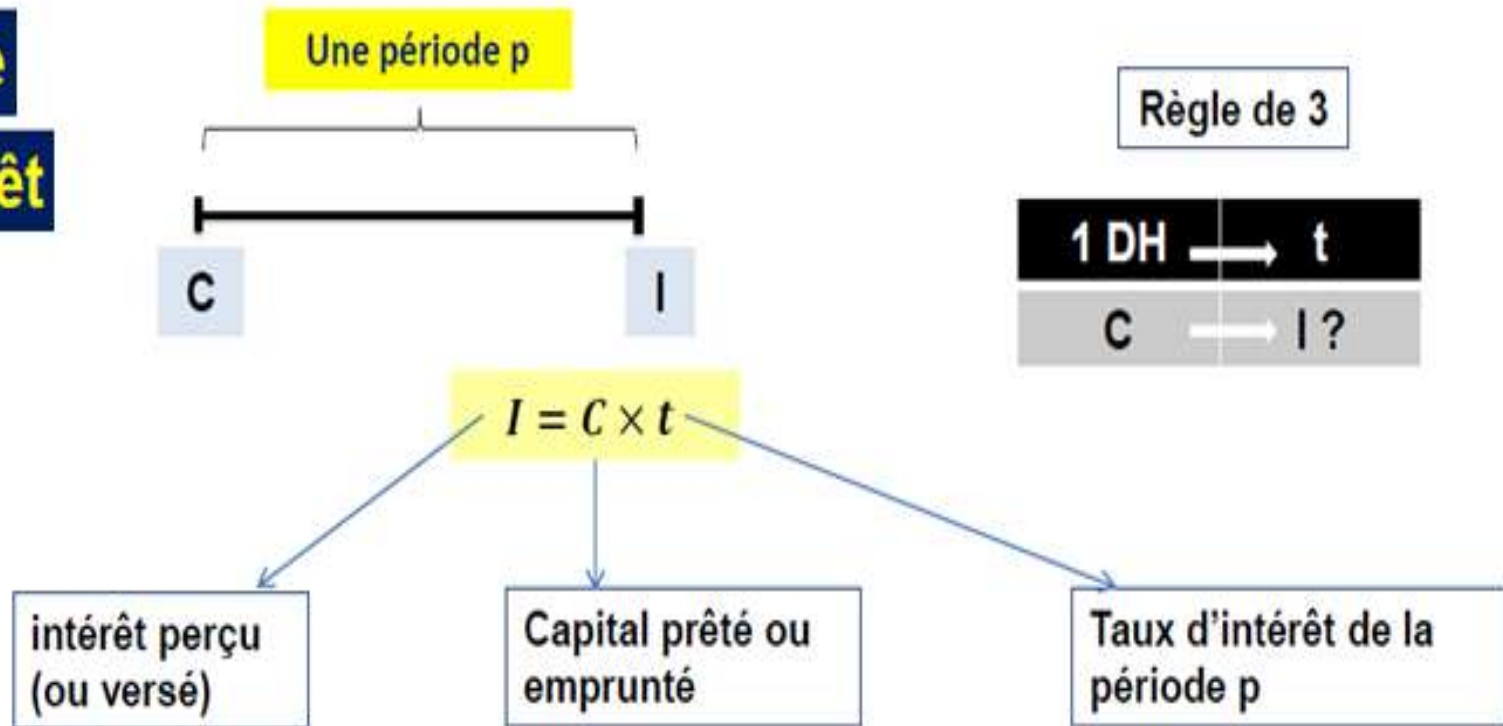
Le taux d'intérêt t d'une période p est l'intérêt produit par un capital de 1 Dh placé (emprunté) pendant la période p



Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

le taux d'intérêt d'une période (suite)

Relation entre le taux d'intérêt et l'intérêt



Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

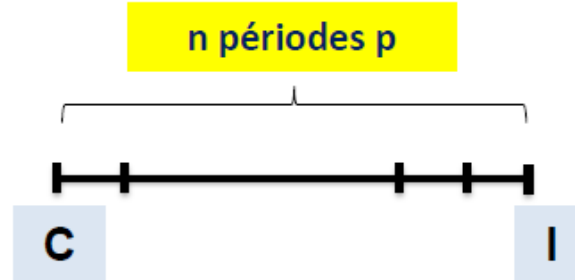
Les intérêts simples (Notion d'intérêts simple)

■ Principe

L'intérêt simple se calcule toujours sur le principal

L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an)

■ Calcul pratique



L'intérêt total I après les n périodes est donné par:

$$I = C \times t \times n$$

C : le montant du capital prêté ou emprunté

t : le taux d'intérêt annuel (en pourcentage)

n : la durée (en année)

I : le montant de l'intérêt à calculer

Exemple

Placement d'un capital de 100 dhs à un taux annuel de 5% d'intérêts simples sur 2 ans.

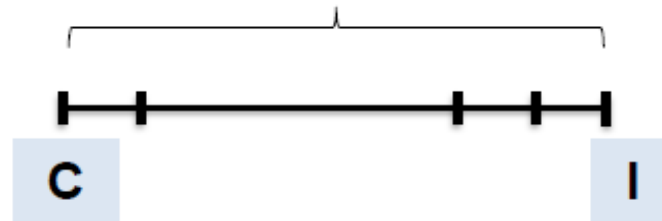
Les intérêts seront de : $100 \times (5 / 100) \times 2 = 10$ dhs.

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts simples (Notion d'intérêts simple)

- Taux d'intérêt annuel, semestriel, trimestriel, mensuel et journalier:

n années = s semestres = T trimestres = m mois = j jours



t : le taux d'intérêt annuel

Donc:

$$I = C \times t \times n$$

On a alors:

$$I = \frac{C \times t \times s}{2}$$

$$I = \frac{C \times t \times T}{4}$$

$$I = \frac{C \times t \times m}{12}$$

$$I = \frac{C \times t \times j}{360}$$

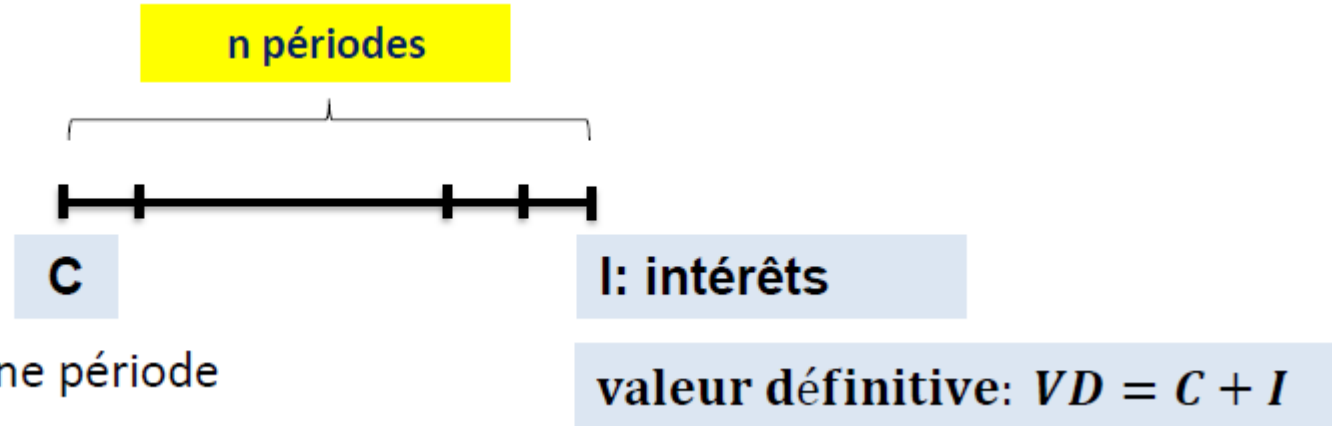
L'année financière ou commerciale=360 jours.

L'année civile compte 365 ou 366 jours

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts simples (Notion d'intérêts simple)

- Valeur définitive ou valeur acquise (valeur future)



La valeur définitive VD ou la valeur acquise après la durée de n périodes est la somme du capital initial C et des intérêts I :

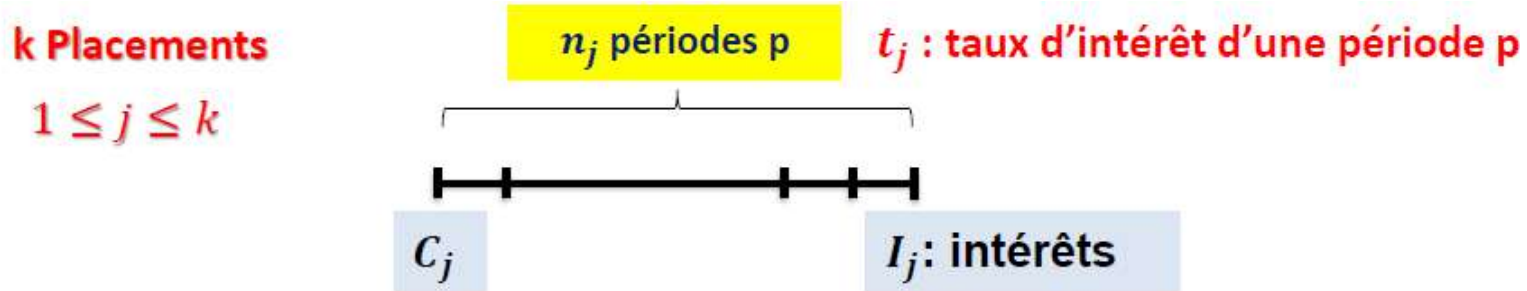
$$VD = C + I$$

$$VD = C + C \times t \times n = C(1 + t \times n)$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts simples (Notion d'intérêts simple)

- Taux d'intérêt moyen d'une série de placements simultanés



L'intérêt global procuré par les k placements est la somme des k intérêts:

$$I_G = \sum_{j=1}^k C_j \times t_j \times n_j$$

Définition:

Le taux d'intérêt moyen (d'une période p) est le taux d'intérêt t_m qui procure le même intérêt global lorsqu'il est appliqué aux k placements:

$$\sum_{j=1}^k C_j \times t_j \times n_j = \sum_{j=1}^k C_j \times t_m \times n_j$$



$$t_m = \frac{\sum_{j=1}^k C_j \times t_j \times n_j}{\sum_{j=1}^k C_j \times n_j}$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts simples (Notion d'intérêts précompté)

▪ Définition

L'intérêt est dit précompté lorsqu'il est calculé et prélevé par anticipation



▪ Calcul d'intérêt précompté

$$I = C \times t \times n$$

C le nominal d'un emprunt
t le taux d'intérêt précompté
et n la durée de remboursement.

▪ Somme effectivement prêtée ou empruntée (C')

$$C' = C - I = C - C.t.n$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts simples (Notion d'intérêts précompté)

▪ Taux effectif d'un emprunt ou d'un placement à intérêt précompté:

Quand les intérêts sont payables d'avance, le taux d'intérêt effectif est celui appliqué au capital effectivement prêté ou emprunté C' donne le montant de l'intérêt produit. En désignant par T , le taux effectif, on aura alors:

$$C.t.n = C'.T.n$$

$$\text{Or } C' = C - I = C - C.t.n$$

$$\text{Donc : } C.t.n = \left(C - C.t.n \right).T.n \quad t = T \left(1 - t.n \right)$$

$$\text{Donc } T = \frac{t}{1 - t.n}$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts composés

▪ Principe et champ d'application:

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsqu'à l'issue de chaque période de placement, les intérêts sont ajoutés au capital pour porter eux même intérêts à la période suivante au taux convenu. On parle alors d'une capitalisation des intérêts.

Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an.

Exemple

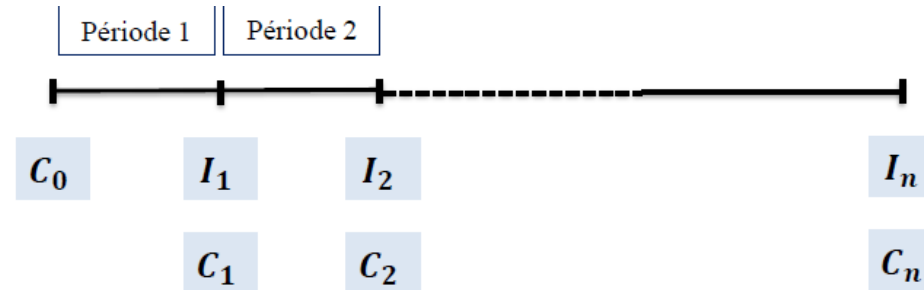
Placement d'un capital de 100 DHS à un taux annuel de 5% d'intérêts composés sur 2 ans.

Les intérêts seront de : $100 \times (5 / 100) = 5$ DHS la première année. Puis : $105 \times (5 / 100) = 5,25$ DHS la deuxième année. Soit au total 10,25 DHS.

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts composés

- Formule de la valeur acquise à intérêts composé quand le temps de placement est un nombre entier de périodes (les durées sont en années complètes)



L'intérêt reçu à la fin de la période 1 pour un capital C_0 au taux d'intérêt i est égal à:

$$I_1 = C_0 \times i$$

Le nouveau capital est:

$$C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1 + i)$$

$$C_1 = C_0(1 + i)$$

L'intérêt reçu à la fin de la période 2 pour un capital C_1 au taux d'intérêt t est égal à:

$$I_2 = C_1 \times i = C_0(1 + i) \times i$$

Le nouveau capital est:

$$C_2 = C_1 + I_2 = C_0(1 + i) + C_0(1 + i) \times i$$

$$C_2 = C_0(1 + i)(1 + i)$$

$$C_2 = C_0(1 + i)^2$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts composés

- **Formule de la valeur acquise à intérêts composé quand le temps de placement est un nombre entier de périodes (les durées sont en années complètes) (suite)**

A la période n , on obtient:

L'intérêt de la période n :

$$I_n = C_0(1 + i)^{n-1} \times i$$

La valeur acquise de la période n :

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

C'est le terme général d'une suite géométrique de raison $(1 + i)$ et de terme initial C_0 .

La valeur acquise totale à intérêts composés est :

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

L'intérêt total est :

$$I = C_n - C_0 = C_0(1 + i)^n - C_0$$

$$I = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts composés

- Formule de la valeur acquise à intérêts composé quand le temps de placement est un nombre non entier de périodes (méthode commerciale):

La durée:

$n = k$ années +

s semestres ou t trimestres ou j jours

On exprime la durée en années:

$$k + \frac{p}{q} \text{ années}$$

$$k + \frac{s}{2} \text{ années}$$

$$k + \frac{t}{4} \text{ années}$$

$$k + \frac{m}{12} \text{ années}$$

$$k + \frac{j}{360} \text{ années}$$

La méthode commerciale consiste à généraliser la formule utilisée pour une durée entière.

La valeur acquise totale à intérêts composés est :

$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{p}{q}}$$

$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{s}{2}}$$

$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{t}{4}}$$

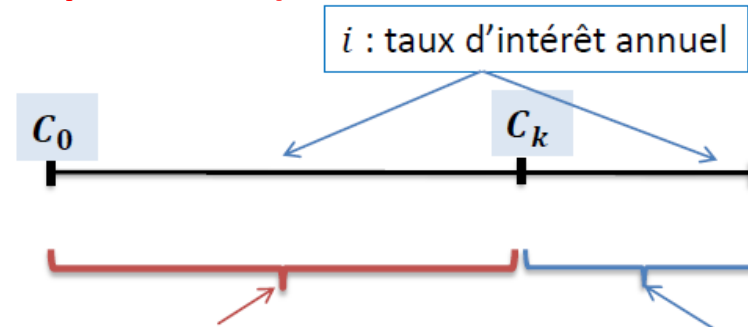
$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{m}{12}}$$

$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^{k+\frac{j}{360}}$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts composés

- Formule de la valeur acquise à intérêts composé quand le temps de placement est un nombre non entier de périodes (méthode de rationalisation)



Placement à intérêts composés *k années*

Placement de C_k à intérêts simples pendant *s semestres ou t trimestres ou m mois ou j jours*

La valeur acquise totale $C_{k+\frac{p}{q}}$ du placement est:

$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_k + I_2 = C_0(1+i)^k + I_2$$

$$I_2 = \frac{C_k \times i \times s}{2}$$

s semestres

$$I_2 = \frac{C_k \times i \times t}{4}$$

t trimestres

$$I_2 = \frac{C_k \times i \times m}{12}$$

m mois

$$I_2 = \frac{C_k \times i \times j}{360}$$

j jours

$$C_{k+\frac{p}{q}} = C_0(1+i)^k \left(1 + i \frac{p}{q}\right)$$

$$p/q = s/2$$

$$p/q = m/12$$

$$p/q = t/4$$

$$p/q = j/360$$

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Taux proportionnel

Définition

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leur période capitalisation respective

Formule générale

Taux périodique proportionnel = Taux nominal \times Durée de la période / Durée de l'année.

Exemple

-Taux proportionnel mensuel pour un taux annuel de 6% : $0,06 \times 1 \text{ mois} / 12 \text{ mois} = 0,50\%$.

- Taux proportionnel pour la période du 1/1/2005 au 15/2/2005 pour un taux annuel de 10 % : $0,10 \times 46 \text{ jours} / 365 \text{ jours} = 1,26 \%$.

Chapitre 2: Les intérêts simples et les intérêts composés

Taux équivalent

Définition

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes sont équivalents si et seulement si pour un même capital et pour une même durée, ils conduisent à une même valeur acquise

Formule générale

Taux périodique équivalent = $(1 + \text{Taux annuel})^{\text{Durée de la période} / \text{Durée de l'année}} - 1$

Exemple

- Taux équivalent mensuel pour un taux annuel de 6% : $1,06^{1 \text{ mois} / 12 \text{ mois}} - 1 = 0,49\%$.
- Taux équivalent pour la période du 1/1/2005 au 15/2/2005 pour un taux annuel de 10% : $1,10^{46 \text{ jours} / 365 \text{ jours}} - 1 = 1,21\%$.

Travaux dirigés (Corrections)
Série n°1 : Les intérêts simples et les intérêts composés

I Les intérêts simples

Exercice 1

- a- Vous placez une somme de 4 500 DHS sur un livret de caisse d'épargne durant 7 mois au taux de 3 %. Calculer l'intérêt acquis.

Solution :

$$I = C \times t \times n$$

I : intérêt acquis C : capital placé t : taux d'intérêt n : nombre de période

$$I = 4\,500 \times (3/100) \times (7/12) = 78.75 \text{ DHS}$$

- b- On place un capital de 8 000 DHS pendant 72 jours au taux annuel de 6,5 %. Calculer l'intérêt et la valeur acquise à l'issue du placement

Solution :

$$I = 8000 \times \frac{0,065}{360} \times 72 = 104 \text{ DHS}$$

Valeur acquise = Capital + Intérêts

$$\text{Valeur acquise : } 8\,000 + 104 = 8\,104 \text{ DHS}$$

- c- Combien de temps faut-il placer un capital de 30 000 DHS au taux de 8 % pour qu'il rapporte 1 200 DHS ?

Solution :

La solution consiste à remplacer par X l'inconnue dans la formule de calcul de l'intérêt

$$1\,200 = 30\,000 \times (X) \times (8/100)$$

$$X = 1\,200 / (30\,000 \times (8/100))$$

$$X = 1\,200 / 2\,400$$

$$X = 0.5$$

$$\text{Durée} = 0.5 \times 12 \text{ mois} = 6 \text{ mois}$$

- d- Quel taux faut-il placer un capital de 20 000 DHS pendant 6 mois pour qu'il rapporte 1 000 DHS ?

Solution :

$$1\,000 = 20\,000 \times (6/12) \times (X)$$

$$X = 1\,000 / (20\,000 \times 6/12)$$

$$X = 1\,000 / 10\,000$$

$$X = 0.1$$

$$\text{Taux} = 0.1 \times 100 = 10 \%$$

e- Quel capital placé pendant 8 mois au taux de 8 % rapporte 2000 DHS ?

Solution :

$$2\ 000 = (X) \times (8/12) \times (8/100)$$

$$X = 2000 / ((8/12) \times (8/100))$$

$$X = 2000 / 0.05333333$$

$$X = 37\ 500 \text{ DHS}$$

Exercice 2 : Calculer, dans chaque cas, la durée de placement en jours : Du 18 Mai au 23 Septembre ; Du 13 Septembre au 14 Février ; Du 10 Février au 2 Août (année bissextile).

Solution :

Règles : On ne compte pas le premier jour et on compte le dernier jour

On compte le nombre de jours exacts pour les mois complets

1^{er} cas : Durée de placement en jours du 18 Mai au 23 Septembre

Mai	Juin	Juillet	Août	septembre	Total
31j-18j=13j	30j	31j	31j	23j	128j

2^{ème} cas : Durée de placement en jours du 13 Septembre au 14 février

Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Janvier	Février	Total
30j-13j=17j	31j	30j	31j	31j	14j	154j

3^{ème} cas : Durée de placement en jours du 10 février au 02 août (année bissextile)

Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Total
29j-10j=19j	31j	30j	31j	30j	31j	02j	174j

Exercice 3 : Une somme de 10 000 dirhams est placée sur un compte du 23 Avril au 9 Août au taux simple de 7 %

1/ Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.

2/ Calculer la valeur acquise par ce capital.

3/ Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 315 dirhams.

Solution :

1) Calculons alors le nombre de jours de placement du 23 Avril au 9 Août

Avril	Mai	juin	Juillet	Août	Total
30j-23j=7j	31j	30j	31j	9j	108j

$$I = C \times t \times n = 10\,000 \times (7/100) \times (108/360) = 210 \text{ DHS}$$

2) La valeur acquise par ce capital est égale à VD,

$$VD = C + I = 10000 + 210 = 10210 \text{ DHS}$$

3) De la formule $I = C \times t \times n$, on calcule la durée du remboursement, soit $n = 162j$

Avril	Mai	juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Total
30j-23j=7j	31j	30j	31j	31j	30	02	162j

Date de remboursement : 02 octobre

Exercice 4 : Calculer le taux moyen de placement des capitaux suivants :

2000 DHS placés à 3% pendant 30 jours, 3000 DHS placés à 4% pendant 40 jours et 4000 DHS placés à 5% pendant 50 jours.

Rappel

Le taux d'intérêt moyen (d'une période p) est le taux d'intérêt t_m qui procure le même intérêt global lorsqu'il est appliqué aux k placements:

$$\sum_{j=1}^k C_j \times t_j \times n_j = \sum_{j=1}^k C_j \times t_m \times n_j$$



$$t_m = \frac{\sum_{j=1}^k C_j \times t_j \times n_j}{\sum_{j=1}^k C_j \times n_j}$$

Solution :

$$\text{Dans notre cas } t_m = \frac{2000 \cdot 3 \cdot 30 + 3000 \cdot 4 \cdot 40 + 4000 \cdot 5 \cdot 50}{2000 \cdot 30 + 3000 \cdot 40 + 4000 \cdot 50} = 4,37 \%$$

Exercice 5 ; Une personne place à intérêts précomptés la somme de 30 000 DHS pour une durée de 6 mois au taux de 10 %. Quel est le taux effectif de ce placement ?

Rappel

▪ **Taux effectif d'un emprunt ou d'un placement à intérêt précompté:**

Quand les intérêts sont payables d'avance, le taux d'intérêt effectif est celui appliqué au capital effectivement prêté ou emprunté C' donne le montant de l'intérêt produit. En désignant par T , le taux effectif, on aura alors:

$$C.t.n = C'.T.n$$

$$\text{Or } C' = C - I = C - C.t.n$$

$$\text{Donc : } C.t.n = (C - C.t.n).T.n \quad t = T(1 - t.n)$$

$$\text{Donc} \quad T = \frac{t}{1 - t.n}$$

Solution :

$$T = \frac{t}{1 - \frac{t.n}{12}} \Rightarrow T = \frac{0,01}{1 - \frac{10.6}{1200}} = 10,526 \%$$

Exercice 6 : On possède un capital de 1 800 DHS. Deux options de placement sont proposées :

- pas de frais, taux annuel de 5 %
- 40 de frais fixe pris sur le capital, taux annuel de 9 %

Exprimer les valeurs acquises $f(x)$ et $g(x)$ pour chaque option après x jours de placement, pour $x \in [0 ; 300]$. Représenter graphiquement. Comparer les placements.

Solution :

premier placement :

$$f(x) = 1800 + 1800 \times \frac{0,05}{360} x$$

$$f(x) = 0,25x + 1800$$

deuxième placement :

$$g(x) = 1760 + 1760 \times \frac{0,09}{360} x$$

$$g(x) = 0,44x + 1760$$

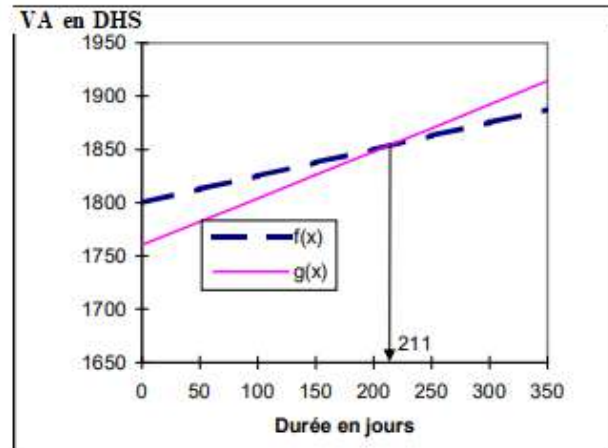
L'abscisse x de l'intersection est donnée par l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire :

$$0,25x + 1800 = 0,44x + 1760$$

$$0,44x - 0,25x = 1800 - 1760$$

$$0,19x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{0,19} = 210,52 \Rightarrow x \approx 211$$

Conclusion : à partir du 211^e jour, le deuxième placement $g(x)$ est plus intéressant.



Exercice 6 : On négocie à une banque des bons de trésor de nominal 3 000 000 DHS échéant dans 4 mois. Sachant que les intérêts sont précomptés au taux de 5%, déterminez :

- Les intérêts précomptés
- La somme effectivement placée
- Le taux effectif de placement

Solution :

a. $I_{\text{pré}} = C \times t_{\text{pré}} \times n = 3\,000\,000 \times (5/100) \times (4/12) = 50\,000 \text{ DHS}$

b. Somme effectivement placée = $C - I_{\text{pré}} = 2\,950\,000 \text{ DHS}$

c.

$$T = \frac{t_{\text{pré}}}{1 - \frac{t_{\text{pré}} \cdot n}{12}} \Rightarrow T = \frac{0,05}{1 - \frac{5,4}{1200}} = 5,08\%$$

II Les intérêts composés

Exercice 1 : Calculer la valeur acquise d'un capital de 8 000 DHS placé pendant 5 ans au taux annuel de 6,5 %. En déduire le montant des intérêts. (Capitalisation annuelle)

Solution :

On utilise la formule

$$C_n = C_0(1+i)^n \text{ avec :}$$

C_n : valeur acquise C_0 : capital placé i : taux périodique n : nombre de périodes

$$C_5 = 8\,000(1+0,065)^5$$

$$C_5 = 8000 \times 1,065^5 \approx 10960,69 \text{ DHS}$$

$$I = 10960,69 - 8000 = 2960,69 \text{ DHS}$$

Exercice 2 : Un capital de 12 000 DHS est placé pendant 4 ans ; la capitalisation des intérêts est mensuelle. A l'issue du placement, la valeur acquise se monte à 15 245,87 DHS. Calculer le taux mensuel i_m de l'intérêt.

Solution :

On a

$$C_n = C_0(1+i_m)^n \Leftrightarrow \frac{C_n}{C_0} = (1+i_m)^n \Leftrightarrow 1+i_m = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

n étant le nombre de mois on a ici $n = 4 \times 12 = 48$.

$$\text{On a l'équation} \quad 15\,245,87 = 12\,000(1+i_m)^{48}$$

$$\text{D' où} \quad (1+i_m)^{48} = \frac{15\,245,87}{12\,000} \Rightarrow 1+i_m = \left(\frac{15\,245,87}{12\,000}\right)^{\frac{1}{48}}$$

$$\text{Ce qui donne} \quad 1+i_m = 1,005 \text{ et donc } i_m = 0,005 = 0,5\% \text{ par mois.}$$

Exercice 3 : Une somme de 10000 DHS est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.

1/ Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ?

2/ Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 20000 DHS, quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?

3/ Si la somme placée aujourd'hui est de 10000 DHS, après combien de temps disposera-t-on d'une somme égale à 23580 DHS ?

4/ Si au bout de 5 ans la valeur acquise du placement est de 17821 DHS à quel taux le placement a été effectué ?

Solution :

1) Valeur acquise

$$C_n = C_0(1 + t)^n$$

Donc, $C_5 = 10000 \times (1 + 0,1)^5 = 16105,100 \text{ Dh}$

2) Valeur actuelle correspondante à une valeur acquise de 20000 DH.

$$C_n = C_0(1 + t)^n$$

Donc, $C_0 = C_n(1 + t)^{-n} = 20000 \times (1 + 0,1)^{-5} = 12418,426 \text{ Dh}$

3) Durée de placement

$$C_n = C_0(1 + t)^n$$

$$\ln(C_n) = \ln(C_0) + n \ln(1 + t)$$

Donc,

$$n = \frac{\ln(C_n) - \ln(C_0)}{\ln(1 + t)}$$

Alors,

$$n = \frac{\ln(23580) - \ln(10000)}{\ln(1 + 0,1)} = 9 \text{ ans}$$

4) Taux de placement

$$C_n = C_0(1 + t)^n$$

Donc

$$(1 + t)^n = \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow 1 + t = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} \Leftrightarrow t = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$\Rightarrow t = \left(\frac{17821}{10000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0,1225 = 12,25\%$$

Exercice 4 : Un capital de 7 000 DHS est placé à un taux annuel de 6 %. La capitalisation des intérêts est mensuelle. La valeur acquise se monte à 10 642,59 DHS. Calculer en mois puis en années, la durée du placement (utiliser les taux proportionnels).

Solution :

On part de la formule des intérêts composés

$$C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow \ln(1+i)^n = \ln \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow n \ln(1+i) = \ln \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow n = \frac{\ln \frac{C_n}{C_0}}{\ln(1+i)}$$

le taux mensuel proportionnel vaut $\frac{6\%}{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005$

Ici on a l'équation : $10\,642,59 = 7\,000(1+0,005)^n$

D'où : $(1+0,005)^n = \frac{10\,642,59}{7\,000}$

On passe en logarithmes : $\ln(1+0,005)^n = \ln \frac{10\,642,59}{7\,000} \Rightarrow n \ln(1,005) = \ln \frac{10\,642,59}{7\,000}$

D'où $n = \frac{\ln \frac{10\,642,59}{7\,000}}{\ln(1,005)} = \frac{\ln(10\,642,59) - \ln(7\,000)}{\ln(1,005)} \Rightarrow n = 84$ mois, soit 7 années.

Exercice 5 : Une somme de 5 000 DHS vous sera remise dans 5 ans. Sachant que le taux de placement est de 7 %. Quelle est la valeur de ce capital aujourd'hui ?

Solution :

On utilise la formule des intérêts composés

$$C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow C_0 = C_n(1+i)^{-n} = 5\,000(1+0,07)^{-5} = 3564,93 \text{ DHS}$$

Exercice 6 : Pendant combien de temps un capital donné placé au taux de 8% peut-il s'accroître de 25% de sa valeur.

Solution :

si le capital doit s'accroître de sa valeur de 25% on aura $C(1,25)$

Or $C_n = C(1,08)^n$ si on doit poser une égalité entre les deux relations on aura

$C(1,08)^n = C(1,25)$ soit $(1,08)^n = 1,25$. En appliquant la fonction log on a

$$n \log(1,08) = \log(1,25) \text{ soit } n = \log(1,25) / \log(1,08)$$

Soit $n = 2,8994$ ans soit 2 ans 10 mois 24 jours

Exercice 7 : Une personne désire disposer d'une somme de 540 242,75 DHS à la fin dans 15 ans. Pour ce faire il place un capital C_0 à un taux semestriel de 5%. La capitalisation des intérêts étant semestrielle :

1. Déterminer le capital C_0 placé
2. Le capital trouvé est placé à un taux semestriel de 5% pendant 15 ans. La capitalisation des intérêts étant semestrielle
 - 2.1. Déterminer la valeur acquise. Que remarquez-vous ?
 - 2.2. Déterminer les intérêts produits au cours de la 8^{ème} et 12^{ème} période.
 - 2.3. Déterminer l'intérêt global de ce placement

Solution :

1. Déterminons le capital C_0 placé

On a $C_0 = C_n (1+i)^{-n}$ dans ce cas le C_n de la formule est égal à 540 242,75 DHS, le taux $t = 5\%$. La capitalisation étant semestrielle on a $n = 15 \times 2$ soit $n = 30$ semestres.

Ceci dit $C_0 = 540\,242,75 (1,05)^{-30}$ soit $C_0 = 125\,000$ DHS. Le capital placé est égal à 125 000 DHS

2.

1. Déterminons la valeur acquise

Soit C_n cette valeur acquise. On a $C_n = 125\,000(1,05)^{30}$ soit **540 242, 75DHS**. Nous remarquons que C_n est égal à la somme dont voulait disposer la personne dans 15 ans.

2. Déterminons l'intérêt produit au cours :

- De la 8^{ème} période

Soit I_8 cet intérêt. $I_8 = C_0 (1+i)^{8-1} i$ soit $I_8 = 125\,000(1,05)^7 \times 0,05$ soit $I_8=8\,794,375$ DHS ou soit $I_8= C_8 - C_7$ soit $I_8 = 125\,000[(1,05)^8 - (1,05)^7]$ soit $I_8=8\,794,375$ DHS.

- De la 12^{ème} période

Soit I_{12} cet intérêt. $I_{12} = C_0 (1+i)^{12-1} i$ soit $I_{12} = 125\,000(1,05)^{11} \times 0,05$ soit $I_{12}=10\,689,61875$ DHS ou soit $I_{12}= C_{12} - C_{11}$ soit $I_{12}=125\,000[(1,05)^{12} - (1,05)^{11}]$
Soit $I_{12}=10\,689,61875$ DHS

3. Déterminons l'intérêt global de ce placement

- 1^{ère} méthode

$I = C_n - C_0$ soit $I = 540\,242,75 - 125\,000$ soit $I=415242,75$ DHS

- 2^{ème} méthode

$I = C_n - C_0$ soit $I = C_0 (1+i)^{30} - C_0$ soit $I = C_0 [(1+i)^{30} - 1]$

Donc on a

$I = 125000[(1,05)^{30} - 1]$ soit $I = 415242,75$ DHS

Exercice 8 : Un capital de 250 000 DHS est placé à intérêts composé pendant 7 ans 3 mois.

Calculer la valeur acquise par ce capital à l'expiration de la durée prévue sachant que le taux de placement est de 11% (capitalisation annuelle des intérêts).

Solution :

Déterminons la valeur acquise

- Méthode commerciale

$$C_{k+p/q} = C(1+i)^{k+p/q} \text{ soit } C_{7+3/12} = 250000(1,11)^{7+3/12} \text{ soit } C_{7+3/12} = 532\,759,9934 \text{ DHS}$$

- Méthode rationnelle

$$C_{k+p/q} = C(1+i)^k (1+i p/q)^p \text{ soit } C_{7+3/12} = 250000(1,11)^7 (1+0,11 \times (3/12))^3 \text{ soit}$$

$$C_{7+3/12} = 533313,6 \text{ DHS}$$

Exercice 9 : calculer

- a) Le taux semestriel proportionnel au taux annuel de 8 %
- b) Le taux mensuel proportionnel au taux semestriel de 6%
- c) Le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10%
- d) Le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8%

Solution :

Rappels :

- Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes sont proportionnels lorsque leur rapport est égal au rapport de leur période capitalisation respective
- Deux taux correspondants à des périodes de capitalisations différentes son équivalents si et seulement si pour un même capital et pour une même durée, ils conduisent à une même valeur acquise

a) $i_s = i_a / 2$ soit 4%

- b) Dans un semestre, on a 6 mois donc pour déterminer le taux mensuel il faut faire

$$i_m = i_s \times (1/6) = 1\%$$

- c) Selon la relation d'équivalence des taux, l'égalité

$(1+i_{\text{sem}})^2 = (1+i_{\text{ann}})^1$ doit être satisfaite.

Il reste à isoler i_{sem}

$$(1+i_{\text{sem}}) = (1+i_{\text{ann}})^{1/2}$$

$$i_{\text{sem}} = (1+i_{\text{ann}})^{1/2} - 1$$

$$i_{\text{sem}} = (1+0.1)^{1/2} - 1 = (1,1)^{1/2} - 1 = 4,88\%$$

d) Selon la relation de l'équivalence des taux, l'identité

$(1+i_{\text{trim}})^4 = (1+i_{\text{ann}})^1$ doit être satisfaite.

$$(1+i_{\text{trim}}) = (1+i_{\text{ann}})^{1/4}$$

$$i_{\text{trim}} = (1+i_{\text{ann}})^{1/4} - 1 = (1,08)^{1/4} - 1 = 1,94\%$$

http://gerard.ledu.free.fr/PDF/FI_INT1.pdf

<http://lestechriquesdecommerce.blogspot.com/2013/10/math-financier.html>

https://cours-examens.org/images/Etudes_superieures/Marketing/math_financiere/Cours_et_exo/cours2valeurtemporelle.pdf

<https://tcetsgedakhla.blogspot.com/2018/04/math-financier-tp-4-avec-corrige.html>

https://www.academia.edu/20388499/INTERETS_COMPOSES

<https://tcetsgedakhla.blogspot.com/2016/03/math-financier-exercice-corrige-tp-1.html>

http://www.fsjes-umi.ac.ma/avis/cours_en_ligne/eg/s2/math%C3%A9matiques-financieres-bencheikh.pdf