Filière Sciences Economiques et Gestion

Semestre S2

Année universitaire 2020/2021

Module : Algèbre et Mathématiques financières
Elément de module : Mathématiques financières

- **Chapitre I : Généralités sur les suites et séries numériques**
- **Chapitre II : Les intérêts simples et composés**
- **Chapitre III : Escompte et équivalence des capitaux**
- **Chapitre IV : Les annuités**
- **Chapitre V : Les emprunts indivis**

Chapitre I : Suites et séries numériques

Suites numériques: Premières définitions

- **définition d'une suite**

Une suite numérique (u_n) est une application ***u*** de l'ensemble des nombres des entiers naturels dans l'ensemble des nombres réels définie comme suit :

$$u : IN \to IR$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

u_n est appelé terme général de la suite (u_n) ou le nième terme de la suite

Une suite:

- **Une fonction**
- **n entier naturel**
- **2 formes: suite explicite ou définie par une relation de récurrence**

Chapitre I : Suites et séries numériques

Suites numériques: Premières définitions

- **suite explicite:** $U_n = f(n)$

Exemples:

$u_n = n^2 + 1$ définie pour $n \in N$

$u_n = \dfrac{1}{n}$ définie pour $n \in N^*$

$u_n = \sqrt{n-2}$ définie pour $n \geq 2$

$u_n = \sqrt{n}$ définie pour $n \geq 0$

- **suite définie par une relation de récurrence:**

Une *suite récurrente* est définie par

- une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- un terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$
- une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} U_p = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

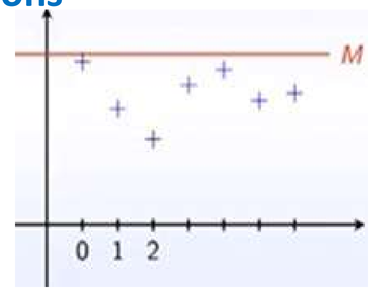
Exemple

- $u_0 = 2$
- $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$, pour $n \geqslant 0$

$$2 \quad 1+\sqrt{2} \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}} \ldots$$

Chapitre I : Suites et séries numériques

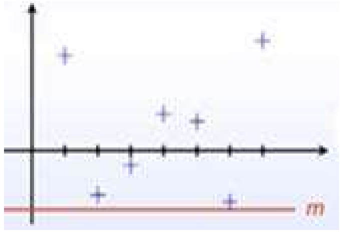
Suites numériques: Premières définitions



* suite majorée, minorée, bornée

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leqslant u_n \leqslant M$$



Exemple

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite définie par: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Montrons par récurrence que (u_n) est minorée par -2

Rappel: Démonstration par récurrence d'une propriété P_n dépendant d'un entier naturel n

<u>Principe</u> :

- On vérifie que la propriété est vraie pour les premiers rangs
- On suppose que la propriété est vraie à un rang n quelconque et on démontre qu'elle reste vraie au rang n +1

On conclut alors que la propriété P_n est vraie quelque soit l'entier naturel n.

$$u_0 = 1 \geq -2 \qquad u_1 = \frac{-1}{2} \geq -2$$

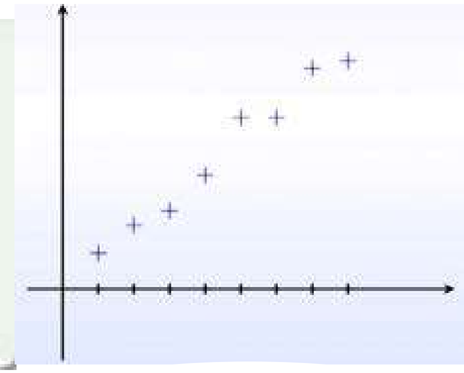
$$Supposons \quad que \quad u_n \geq -2 \quad et \quad montrons \quad que \quad u_{n+1} \geq -2$$

$$on \ a \ u_n \geq -2 \quad et \quad \frac{1}{2}u_n \geq -1 \ \ et \ \ \frac{1}{2}u_n - 1 \geq -1 - 1 = -2$$

$$\Rightarrow \ u_{n+1} \geq -2 \quad donc \ \ suite \ \ \text{minorée} \ \ \text{par - 2}$$

* Suite croissante, décroissante, monotone

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$
- *décroissante*, *strictement décroissante* en inversant le sens des inégalités
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante



Exemple de suite croissante

- Une suite peut être ni croissante ni décroissante

Exemple $\quad u_n = 4 + (-1)^n \qquad u_0 = 5 \;,\; u_1 = 3 \;,\; u_2 = 5$

- Une suite (u_n) est constante lorsque $u_{n+1} = u_n \qquad \forall n \in N$

- Une suite (u_n) est stationnaire s'il existe un entier n_0 tel que:

$$u_{n+1} = u_n \qquad pour tout\ entier \quad n \geq n_0$$

* Convergence, divergence d'une suite

On dit qu'une suite est convergente et converge une constante réelle ℓ si elle admet une limite finie:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad ou \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

* Opérations usuelles sur les limites des suites

- Limites finies:

    - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$
    - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors

    $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'}$$

    - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et

    $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$$

- Limites infinies

    - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
    - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour n assez grand alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

Chapitre I : Suites et séries numériques

Suites numériques: Théorèmes de convergence

* Théorèmes de convergence monotone

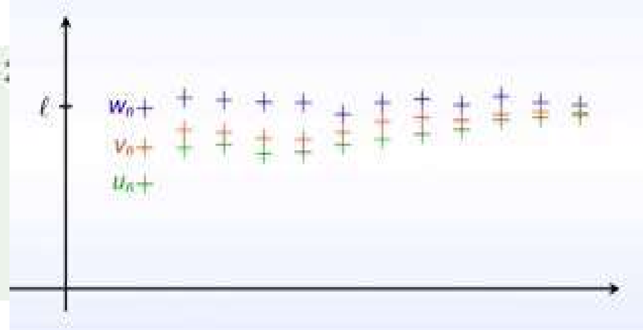
- **Toute suite convergente est bornée**
- **Toute suite croissante et majorée est convergente**
- **Toute suite décroissante et minorée est convergente**
- ***Toute suite croissante non majorée diverge vers*** $+\infty$

* Théorème d'encadrement ou des gendarmes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que pour tout n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} w_n$$

alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$



* Théorème de suites adjacentes

Définition:

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant v_n$
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

Théorème:

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes,

elles convergent et ont la même limite

Chapitre I : Suites et séries numériques

Suites arithmétiques

- **définition**

Une suite de nombres (u_n) est appelée suite arithmétique ou progression arithmétique si la relation de récurrence qui la définit est de type:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r & \textit{relation de récurrence} \\ u_0 = a \in R & \textit{terme initial} \end{cases}$$

r étant une **constante**, et donc indépendante de n

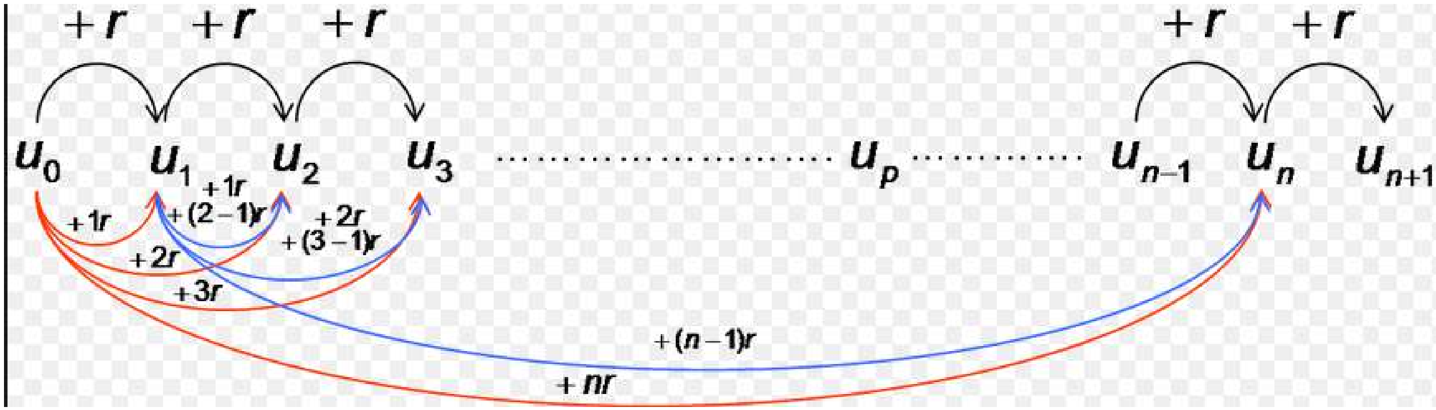
r est appelé **la raison** de la suite

- ✓ Pour monter qu’une suite est arithmétique, il faut montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, quel que soit n.

- ✓ Pour montrer qu’une suite n’est pas arithmétique, il suffit de prouver que les premiers termes de la suite, cette différence n’est pas constante.

Suites arithmétiques

*** *Recherche de la formule permettant de calculer directement le terme général* : u_n**



- Expression du terme général en fonction de n, en partant de u_0 : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

- Expression du terme général en fonction de n, en partant de u_1 : $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$

- Expression du terme général en fonction de n, en partant de u_p : $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

La suite est devenue du type: $u_n = f(n)$

Suites arithmétiques

* somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique

$$S_n = u_0 + u_1 + \quad u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_1 + u_0$$

En additionnant ces deux expressions *de la somme, nous obtenons* :

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$$

Comme : $u_n = u_{n-1} + r$

On a

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + r + u_n - r) + (u_0 + 2r + u_n - 2r) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (u_0 + r + u_n - r) + (u_n + u_0)$$

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (u_0 + u_n) + (u_n + u_0)$$

$$(n+1) \text{ fois}$$

$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$$

Donc

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

La somme des termes à partir du rang k jusqu'au rang $n \geq k$

$$u_k + \quad u_{k+1} \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n = \frac{(n-k+1)(u_k + u_n)}{2}$$

Chapitre I : Suites et séries numériques

Suites géométriques

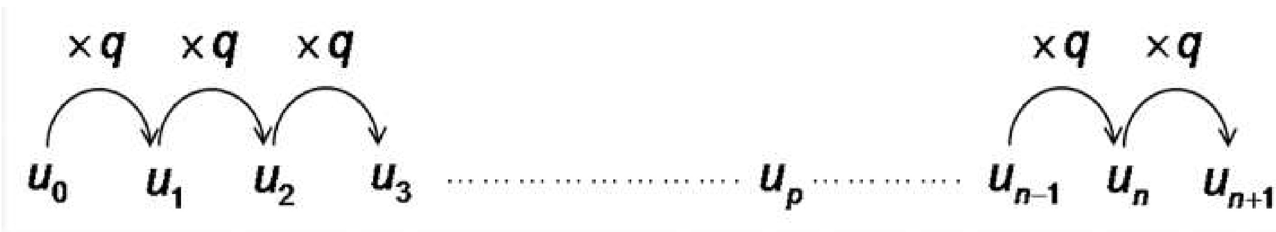
* Définition

Une suite de nombres (u_n) est appelée suite géométrique ou progression géométrique si la relation de récurrence qui la définit est de type:

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n & \textit{relation de récurrence} \\ u_0 = a \in R & \textit{terme initial} \end{cases}$$

q étant une **constante**, et donc indépendante de n

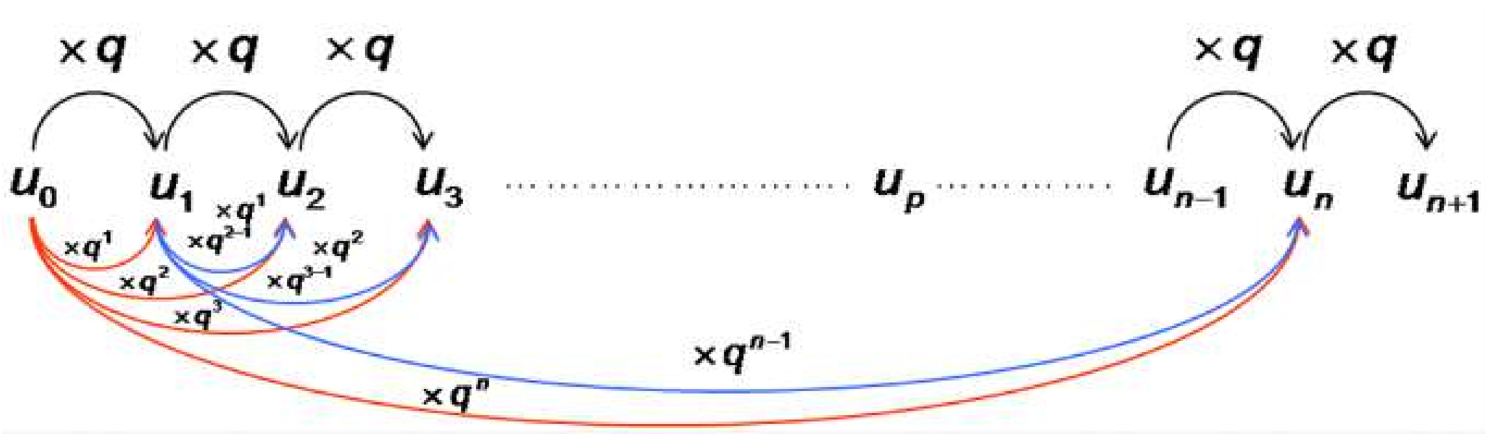
q est appelé **la raison** de la suite



- Pour monter qu'une suite est géométrique, il faut montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, quel que soit n.
- Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, il suffit de prouver que les premiers termes de la suite, ce quotient n'est pas constant.

Suites géométriques

* ***Recherche de la formule permettant de calculer directement le terme général*** : u_n



• Expression du terme général en fonction de n, en partant de u_0 : $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$

• Expression du terme général en fonction de n, en partant de u_1 : $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$

• Expression du terme général en fonction de n, en partant de u_p : $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

La suite est devenue du type: u_n = f(n)

Suites géométriques

* Somme des termes consécutifs d'une progression géométrique

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + u_n$$
$$= u_0 + qu_0 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + q^n u_0$$

Donc

$$qS_n = qu_0 + q^2 u_0 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + q^n u_0 + q^{n+1} u_0$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons

$$S_n - qS_n = u_0 - q^{n+1} u_0 = u_0(1 - q^{n+1})$$

$$\text{càd} \quad S_n(1-q) = u_0(1-q^{n+1})$$

Donc

$$\begin{cases} Si \ q \neq 1 & S_n = u_0 \dfrac{(1-q^{n+1})}{1-q} \\ \\ Si \ q = 1 & S_n = (n+1)u_0 \end{cases}$$

La somme des termes à partir du rang k jusqu'au rang $n \geq k$

$$\begin{cases} S_n = u_k \dfrac{(1-q^{n-k+1})}{1-q} & Si \ q \neq 1 \\ \\ S_n = (n-k+1)u_k & Si \ q = 1 \end{cases}$$

* Convergence s'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial et de raison q

Conséquence :

Si $q \leq -1$	(q^n) oscille et diverge.	(u_n) oscille et diverge.
Si $-1 < q < 1$	(q^n) converge vers 0.	(u_n) converge vers 0.
Si $q = 1$	(q^n) converge vers 1.	(u_n) converge vers u_0 .
Si $q > 1$	$\lim q^n = +\infty$ (q^n) diverge.	$\lim u_n = \pm\infty$ selon le signe de u_0. (u_n) diverge.

▪ Définition

Soit (u_n) *une suite de nombres réels, on pose :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + u_n$$

On appelle série de terme général u_n la suite (s_n) des sommes partielles définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série

▪ Notation

Une série de terme général u_n *est notée* $\sum u_n$ *ou* $\sum_{n \geq n_0} u_n$

Séries Numériques (Généralités)

* convergence: Définition

On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles (s_n) est convergente et converge vers une limite finie S.

Dans ce cas, la limite de la suite (s_n) est appelée somme de la série et on note :

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Une série de terme général u_n est dite convergente si la suite des sommes partielles (s_n) est convergente.

Une série qui n'est pas convergente est dite divergente

* Convergence: Étude de la série géométrique

On considère la série (appelée série géométrique de raison q) de terme général $u_n = u_0 q^n$

$$On\ a\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k = u_0(1+q+q^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q^n) = \begin{cases} Si\ q \neq 1 & S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ & \\ Si\ q = 1 & S_n = u_0(n+1) \end{cases}$$

On remarque ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe si et seulement si |q| < 1

Dans ce cas la série géométrique converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_0 q^n = u_0 \frac{1}{1-q}$$

EXEMPLE La série de terme général $U_n = \dfrac{1}{2^n}$ converge car $q = \dfrac{1}{2}$ vérifie $|q| < 1$.

Sa somme est $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Ce qui signifie que $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots = 2$