# Probabilités

***Pr. El  Kettani Moummou***

# Chap. 1: ENSEMBLES

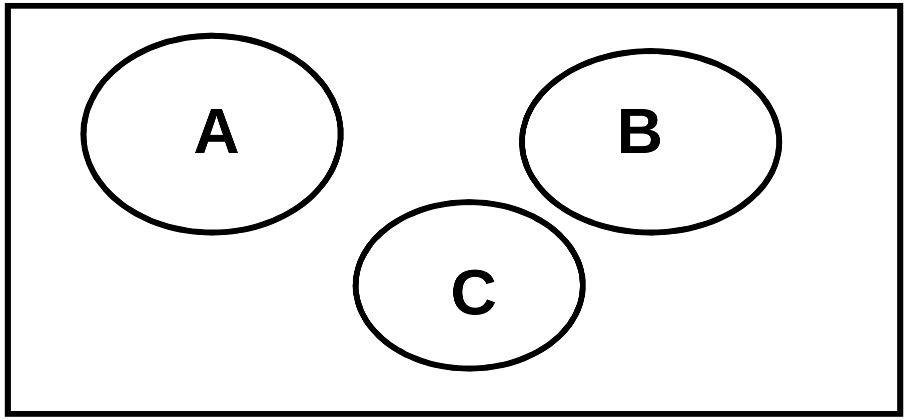
## I- Généralités sur les ensembles:

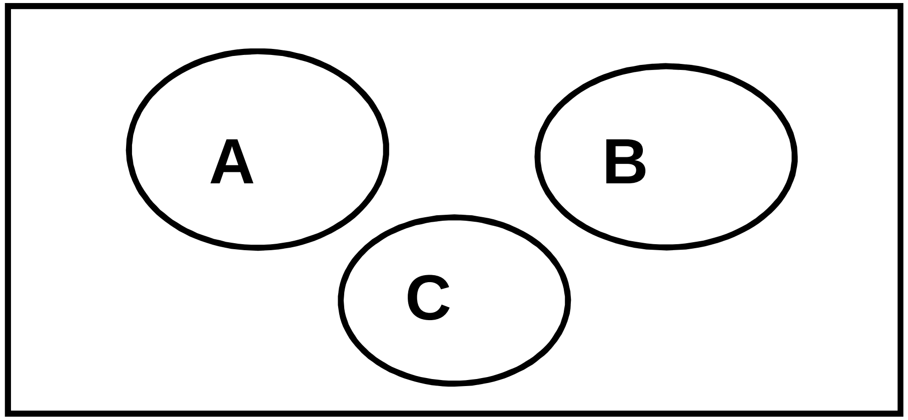
### 1. Définition:

- Un ensemble est défini comme une collection d'objets/individues appelés les éléments de l'ensemble.
- Un ensemble $E$ formé des éléments $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ s'écrira conventionnellement sous la forme suivante: $E=\{a, b, c, d, e\}$

# Diagramme de Venn:

- Il est possible de représenter les ensembles, en figurant par exemple, l'ensemble de référence Ω par un rectangle et chaque sous-ensemble par un cercle à l'intérieur du rectangle.






- La représentation graphique ci-dessus est appelée « diagramme de Venn ou d’Euler ».

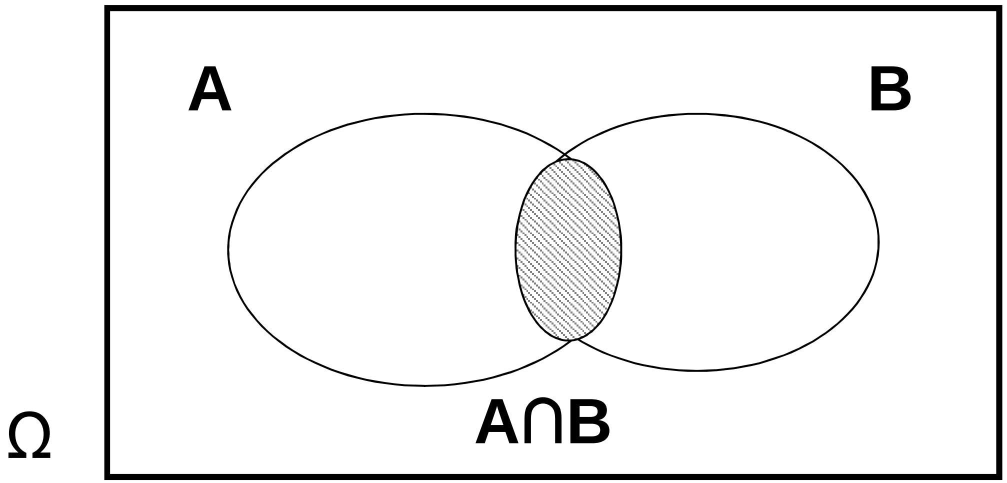
# II. Opérations sur les ensembles:

## 1. L'intersection:

- L'intersection de deux ensembles A et **B** est le sous-ensemble de **A** **et** de **B** dont les éléments appartiennent **à la fois** à A **et** à B.
- On la note **A∩B** et ona:

$$A \cap B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$$

- On la représente par le diagramme de Venn suivant:



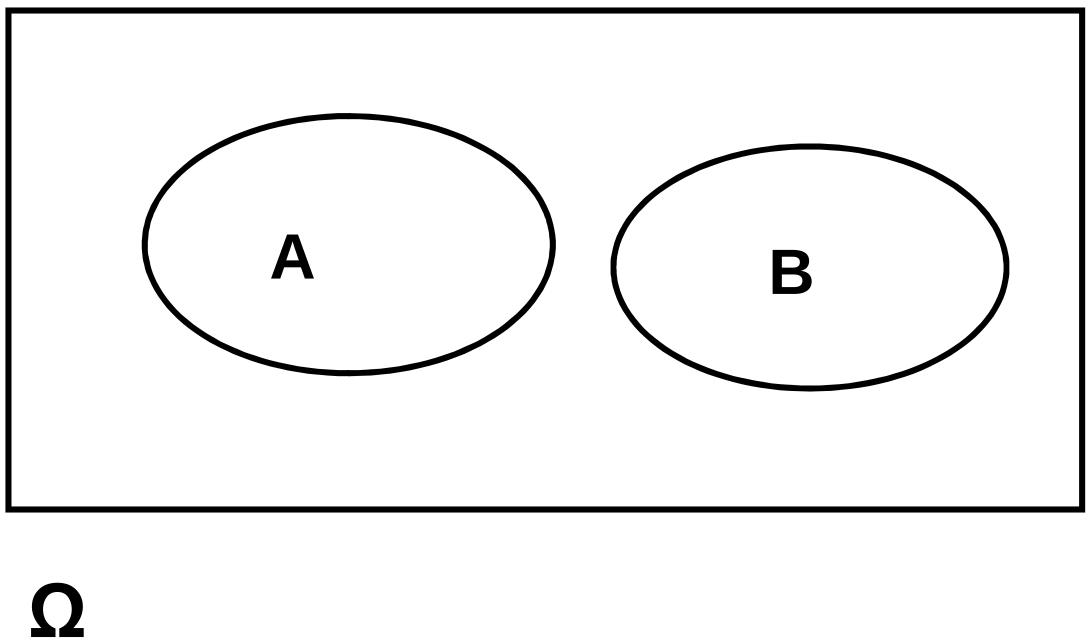
# Exemple:

- Considérons les deux ensembles A et B où:
  - A est l'ensemble des techniciens de gestion,
  - B est l'ensemble des chefs de famille.

  L'intersection de A et B est l'ensemble des techniciens de gestion qui sont chefs de famille.

# 2. Ensembles disjoints:

- On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si leur intersection est vide, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.

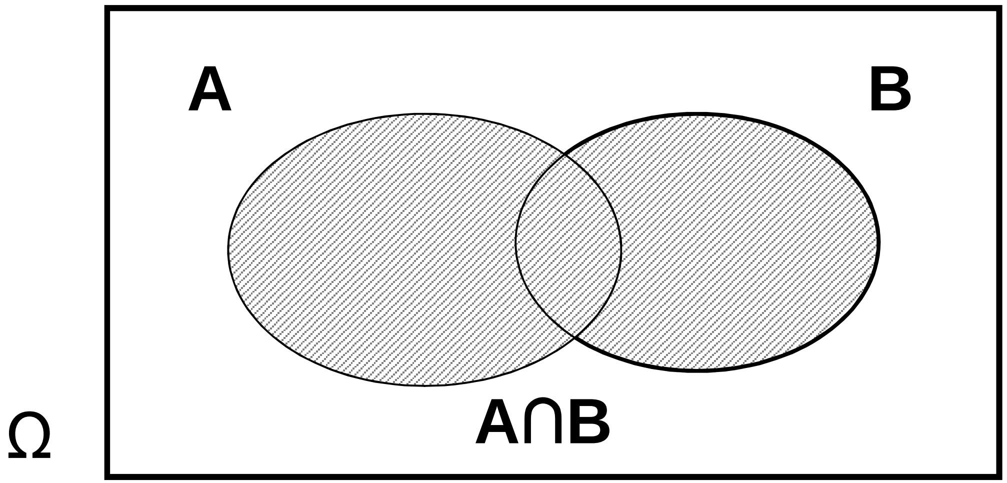


# 3. La réunion:

- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble dont les éléments appartiennent soit à A, soit à B, soit à l'ensemble A∩B.
- On la note AUB et on a:

  $AUB = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

- On la représente par le diagramme de Venn suivant:



# Exemple:

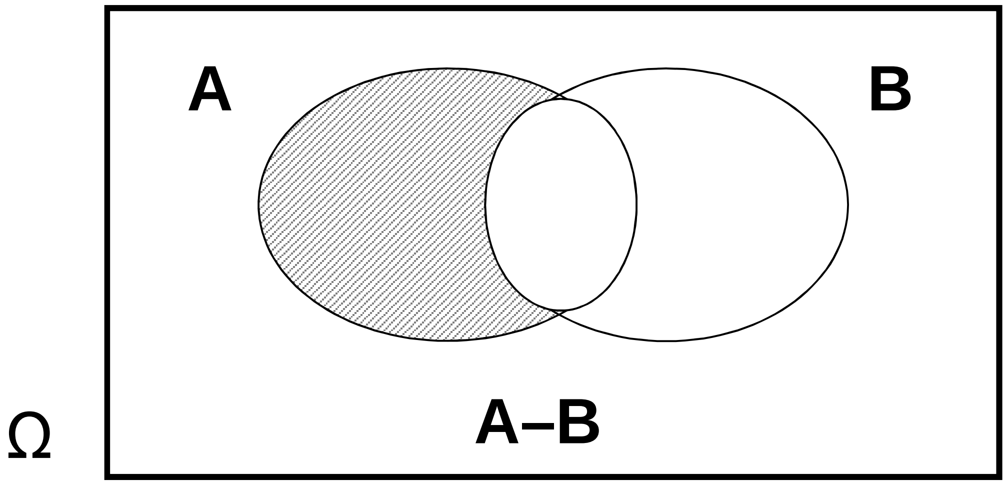
- La réunion des deux ensembles A et B définis par les critères d’appartenance suivantes:
- A: « employé ayant une ancienneté supérieure à 5 ans »
- B: « chef de service »
- Cette réunion est l’ensemble ayant pour critère d’appartenance:   ’’Chef de service ou employé ayant une ancienneté supérieur à 5 ans’’.
- Nous comprenons que, les éléments de la réunion sont soit chef de service, soit employé ayant plus de 5 ans d’ancienneté, soit les deux.

# 4. La différence:

- La différence de deux ensembles A et B est l’ensemble dont les éléments appartiennent à A mais non à B.
- On la note A–B et on a:

$$A - B = \{x \in \Omega \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

- On la représente par le diagramme de Venn suivant:



# Exemple:

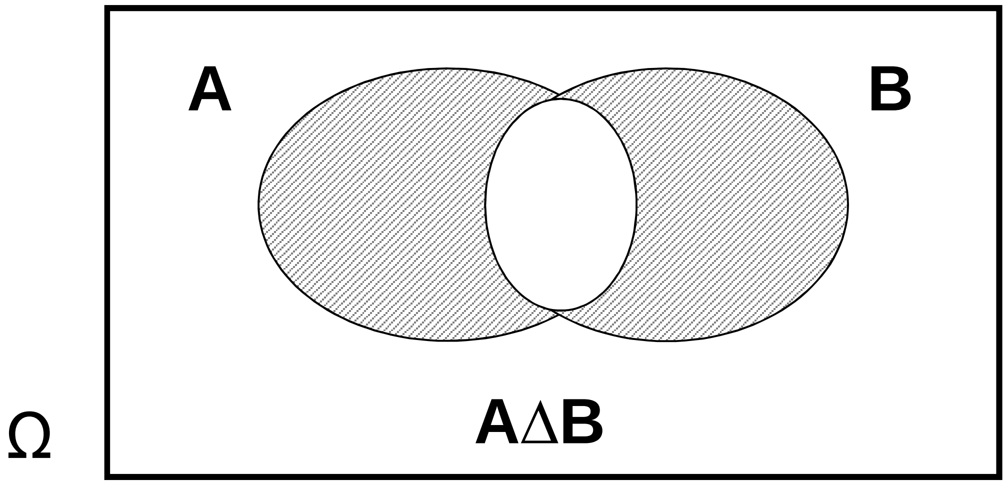
- Considérons les deux ensembles A et B:
- A est l’ensemble des cadres,
- B est l’ensemble des titulaires d’une administration.
- A–B est l’ensemble des cadres non titulaires.

# La différence symétrique:

- La différence symétrique de deux ensembles A et B est l'ensemble dont les éléments appartiennent soit à A, soit à B mais non à $A \cap B$.
- On la note $A \Delta B$ et on a:

$$A \Delta B = \{x \in \Omega \ / \ x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}$$

- On la représente par le diagramme de Venn suivant:



# Exemple:

- Considérons les deux ensembles A et B:
- A est l’ensemble des cadres,
- B est l’ensemble des titulaires d’une administration.
- $A \Delta B$ est l’ensemble qui réunit les cadres non titulaires et les titulaires non cadres.

# Partition d'un ensemble:

- On dit que l'on a effectué une partition d'un ensemble $\Omega$, si l'on a réparti les éléments de cet ensemble dans des sous-ensemble $\mathbf{A_1, \ldots, A_n}$ qui sont deux à deux disjoints.
- C'est-à-dire $\Omega = A_1 U \ldots U\ A_n$

  et $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\ i \neq j \qquad i,j \in \{1,\ldots,n\}$

# Analyse Combinatoire

- L' analyse combinatoire nous permet de répondre a plusieurs problèmes de calcul de probabilités basés sur la détermination des choix possibles.
- Il a pour but le dénombrement des group d'éléments que l' on peut former à l' aide des éléments d' un ensemble fini.
- Operations communes (avec ou sans répétition):
- Arrangement
- Permutation
- Combinaison

# Analyse combinatoire

- <u>Example</u>
- Un placement financier consiste à choisir un portefeuille diversifié entre 3 secteurs: une action parmi cinq du secteur agroalimentaire, une parmi deux du secteur énergétique, et une parmi deux du secteur financier.

- Alors le nombre de choix possibles pour un eventuel placement est (par combinaisons)

  5x2x2=20 possibilités

# Analyse combinatoire

## 1. Permutations sans Répétitions

Définition

Une permutation sans répétition d' un ensemble de n éléments est une disposition ordonnée où chaque élément figure une seule fois:

P(n)=n!=nx(n-1)x(n-2)….2x1

et se lit "factorielle n''.

## 2. Permutations avec Répétitions

Définition

Une permutation avec répétition d' un ensemble de n éléments est une disposition ordonnée où l' élément peut figurer plusieurs fois.

$$P(n)=\frac{n!}{\prod_i n_i!}$$

# Analyse Combinatoire

- Example

  Le nombre de codes possibles qu' ont peut former à partir des quatres chifres

  3-1-3-1

Est donné par:

$$P(4) = \frac{4!}{2!2!}$$

# Analyse combinatoire

## 3. Arrangement sans répétition

Définition

Un arrangement sans répétition de “p’’ éléments choisis parmi “n’’ éléments $(p \leq n)$ est une disposition ordonné sans répétition de ces “p’’ élements parmi “n’’ éléments

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)....(n-p+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

# Analyse Combinatoire

- Example
- 12 candidats se présentent aux élections au conseil d'administration de l 'université comportant 8 places. La liste des élus est publiés suivant le nombre de voix obtenus. Combient y a t- il des listes possibles?

- Le nombre des possibilités est donnée par

$$A_{12}^{8} = \frac{12!}{4!}$$

# Analyse Combinatoire

## 4. Arrangement avec répétition

Définition

Un arrangement avec répétition de “p’’ éléments parmi“n’’éléments est une disposition ordonnée avec répétition de “p’’ éléments pris parmi “n’’ éléments distincts

$$a_n^p = n^p$$

# Analyse Combinatoires

## 3. Combinaisons sans répétitions

Définition

Une combinaison sans répétition de “p’’ éléments choisis parmi “n’’ éléments $\left(p \leq n\right)$

est une disposition non ordonnée et sans répétition de “p’’ élémets pris parmi “n’’ éléments:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

# Analyse Combinatoires

## 4. Combinaison avec répétitions

Définition

Une combinaison avec répétition de “p’’ éléments parmi “n’’ éléments est une disposition non ordonnée de “p’’ éléments choisis parmi les “n’’ éléments distincts (p peut être strictement superieur a n)

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$