*Université Abdelmalek Essaâdi ,*
**Faculté .S.J.E.S Tétouan ,**
Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion.
Année universitaire : 2020-2021

**Travaux Dirigés 4 :**
**Chapitre 4**

**Exercice 1:**
On considère l'échantillon statistique (1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 0).
1.Calculer sa moyenne et sa variance empiriques.
2.En supposant que les données de cet échantillon sont des réalisations d'une variable de loi inconnue, donner une estimation non biaisée de l'espérance et de la variance de cette loi.

**Exercice 2:**
Lors d'un concours radiophonique, on note X le nombre de réponses reçues chaque jour, on suppose que X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma$. Durant les dix premiers jours, on a obtenu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1 = 200$ | $x_2 = 240$ | $x_3 = 190$ | $x_4 = 150$ | $x_5 = 220$ |
| $x_6 = 180$ | $x_7 = 170$ | $x_8 = 230$ | $x_9 = 210$ | $x_{10} = 210$ |

Donner une estimation ponctuelle de m et $\sigma^2$ .

**Exercice 3:**
On veut estimer la moyenne m d'une variable aléatoire X suivant une loi normale, de varaince connue $\sigma^2 = 6,25$ à l'aide d'un échantillon de taille n=100. La moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon observée est 4,3.
1. Construire un intervalle de confiance avec un seuil $1 - \alpha = 0,95$.
2. Comment construire un tel intervalle, si l'on ne connait pas la variance de X, mais seulement la variance empirique de l'échantillon $S^2$ égale à 6,76.

**Exercice 4:**
La moyenne d'un échatillon aléatoire de taille 36 est de 100 et l'écart-type de la population est 24. Trouvez un intervalle de confiance pour la moyenne de la population pour des seuils de probabilité de 90%, 95% et 99%. Que pouvez-vous conclure?

**Exercice 5:**
Un échantillon aléatoire de 36 étudiants, choisi sans remise d'une classe de 72 étudiants, a un poids moyen de 60 kg. On sait que l'écart-type de tous les étudiants de la calsse est de 2 kg.
Trouver un intervalle de confiance pour le poids moyen de la classe au seuil de confiance de 90%

**Exercice 6:**
Un agent de location de chambres d'étudiants veut connaitre le loyer mensuel de location de son secteur. Il choisit au hasard 40 des 300 chambres de son secteur et trouve un loyer mensuel de 600 Dirhams avec un écart-type de 100 Dirhams.
Quel est le loyer mensuel moyen de l'ensemble des 300 chambres avec une certitude de 95%?

**Exercice 7:**
La mesure de la puissance de 5 machines à laver issues de la meme chaine de fabrication a donné les résultats suivants (en watte):

3550 3560 3580 3600 3620

Entre quelles limites varie la moyenne de l'ensemble des machines au risque de 5%?
En supposant que la distribution de la population mère suit une loi normale de paramètres inconnus.

**Exercice 8:**

On tire un échantillon de taille $n = 200$ dans une population d'effectif $N = 650$.

Sur cet échantillon on trouve les résultats suivants:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = 8247 \ et \ \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 = 341745.$$

La varaible étudiée $X$ représent les salaires versés aux employés dans une entreprise donnée. On demande:

1. De donner l'intervalle de confiance au risque $\alpha = 5\%$ se rapportant à l'estimation de la moyenne des salaires dans cette entreprise.
2. Au même risque, déterminer l'estimation de la somme des salaires au sein de cette entreprise.
3. Si l'on avait voulu se montrer plus exigeant concernant l'intervalle de confiance, quels sont les éléments sur lesquels on aurait pu intervenir ?

**Exercice 9:**

Le fabrication d'une machine a garanti à son utilisateur que la longueur moyenne des pièces qu'elle fabrique est de 20 cm avec une variance de 4 cm. Pour vérifier si la machine est bien réglée, on prélève régulièrement un échantillon dont on calcule la longueur moyenne que l'on compare à la moyenne théorique avec un risque de 5%?

1. L'échantillon prélevé est de 100 pièces. Etablir un intervalle de confiance de la moyenne m à 95%
2. L'échantillon prélevé est de 25 pièces. donner le nouvel intervalle de confiance à 95%; pour cela on suppose que les longuers sont distribuées suivant une loi normale de paramètres connus.
3. L'échantillon prélevé est de 10 pièces et fournit les longueurs suivantes en cm :

$$22; \ 22; \ 18; \ 24; \ 18; \ 15,5; \ 18; \ 16; \ 24,5; \ 18$$

Construire le nouvel intervalle de confiance au risque de 5%, en supposant que les longueurs sont distribuées suivant une loi normale de paramètres inconnus.

**Exercice 10:**

Une agence immobilière se propose d'estimer le prix de vente moyen des maisons dans une résidence. Elle constitue à cet effet un échantillon de 25 maisons de moyenne 148000 DHs et d'écart type 62000 DHs. On suppose que la distribution de la population mère est Gaussienne de paramètre inconnus.

1) Donner l'intervalle de confiance à 59% pour le prix de vente moyen de l'ensemble des maisons vendues récemment.
2) Unepersonne affirme acquérir une maison dans cette banlieue au prix de 206000 DHs. Est-ce plausible ? ou cette information est-elle entachée d'erreur ?

**Exercice 11:**

On reçoit dans une ville donnée 7420 coups de téléphone au cours d'une période donnée. Sur un échantillon de $1/5$ tiré au hasard sans remise, on a constaté que 208 coups de téléphone ont été coups avant la fin.

Au risque de 5%, dans quel intervalle se situe la proportion des coups de téléphone qui ont été coups avant terme ?

**Exercice 12:**

Dans une ville, un sondage a été réalisé auprès d'un échantillon indépendant de 400 personnes pour savoir si ces personnes étaient satisfaites ou non dans leur travail. 70% des personnes se sont déclarées satisfaites.

1) Définir la variable X
2) Quelle loi de probabilié suit la variable X ?
3) Donner au niveau de confiance de 95% le nomdre de personnes satisfaites de leur travail que l'on peut rencontrer sur un échantillon de 100 individus.
4) Donner l'estimation de la proportion des personnes satisfaites dans leur travail dans la population considérée et son intervalle de confiance à 95%

**Exercice 13:**

Dans l'analyse de la qualité de fabrication d'une machine, on cherche la proportion p probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse.

On a prélevé un échantillon de 125 pièces, dans lequel on a relevé 10 pièces défectueuses.

1) Déterminer p dans un intervalle de confiance au risque de 5%
2) Supposons que la production totale de cette machine est de 100000 pièces par mois. On se propose d'estimer cette fois, non pas la proportion p de pièces défectueuses, mais leur effectif par intervalle de confiance au risque de 5%

Estimation : * Corrigés des exercices * TD4 → S3
* TD4 : $S_3$ * 2020 - 2021 *

**Ex 1 :**

1. la moyenne et la variance empirique de l'échantillon :

(1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 0) sont données comme suit :

$$* \; \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{1+0+2+1+1+0+1+0+0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0{,}66$$

$$* \; S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1^2+0^2+2^2+1^2+1^2+0^2+1^2+0^2+0^2}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0{,}44$$

2. l'estimation non biaisé de l'espérance et de la variance de cette loi inconnue est déterminée comme suit :

* L'estimation non biaisé de l'espérance de cette loi inconnue est donnée par la moyenne empirique $\bar{x}$ déjà calculée dans la (Q1).

avec : $E(X) = \bar{x} = \frac{2}{3}$

* l'estimation non biaisé de la variance de cette loi inconnue est donnée par $\hat{S}^2 = S^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)$. on trouve : $\hat{S}^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

**Ex 2 :**

- Estimation de la moyenne $m$ de la population :

⇒ on sait que l'estimation sans biaisé de la moyenne $m$ de la population est donnée par $\bar{x}$, avec : $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{2000}{10} = 200$.

- Estimation de la variance $\sigma^2$ de la population.

⇒ on sait que l'estimation sans biais de la variance $\sigma^2$ de la population est donnée par $\hat{S}^2$, avec : $\hat{S}^2 = S^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)$

$$\Rightarrow \hat{S}^2 = S^2 \times \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - (\bar{x})^2\right) \cdot \left(\frac{10}{9}\right) = (40700 - 40000) \cdot \frac{10}{9}$$

$$\simeq 778$$

Donc les estimateurs ponctuels de $m$ et $\sigma^2$ sont respectivement 200 et 778

**EX3:** 1) l'intervalle de confiance de la moyenne m de la population au seuil 1_α st donné comme suit :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x}) \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x})\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

puisque le tirage st avec remise, la taille de l'échantillon $n = 100$, $X \leadsto N(m;\sigma)$ et $\sigma_{(X)} = \sigma = \sqrt{6,25} = 2,5$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

- Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la v.a. X définie au niveau de la population suit une loi normale d'écart-type $\sigma$ connu $(X \leadsto N(m;\sigma))$, et d'après le théorème central limite, l'échantillon prélevé de cette population va suivre la même loi.

$$X \leadsto N(m;\sigma) \Rightarrow \bar{x} \leadsto N(E(\bar{x}), \sigma_{(\bar{x})}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} = T \leadsto N(0,1)$$

par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ st donnée par la table de la loi normale centrée réduite $(N(0;1))$.

comme suit : $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow F(t) = 0,975$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Si on remplace $\bar{x}$ ; $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ; $\sigma$ et n ; par leurs valeurs dans la relation (2), l'intervalle de confiance de la moyenne m de la population au seuil de 95% est donnée comme suit :

$$P\left(4,3-1{,}96\times\sqrt{\frac{6{,}25}{100}}\leq m\leq 4{,}3+1{,}96\times\sqrt{\frac{6{,}25}{100}}\right)=0{,}95$$

$$P(3{,}81\leq m\leq 4{,}79)=0{,}95$$

Interprétation : On a 95 chance sur 100 pour que la moyenne m de la population soit comprise entre 3,81 et 4,79.

2) Dans le cas où la variance $\sigma^2$ de la population est supposée inconnue, il faut la remplacer par son estimateur sans biais $\hat{S}^2$ dans le cas d'un tirage avec remise, avec :

$$\hat{S}^2=S^2\times\frac{n}{n-1}=6{,}76\times\frac{100}{99}=6{,}8282\Rightarrow\hat{S}=2{,}61$$

En remplaçant $\sigma$ par son estimateur $\hat{S}$, l'intervalle de confiance donné dans la relation (2) est reformulé comme suit :

$$P\left(\bar{x}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\leq m\leq\bar{x}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(4,3-1{,}96\times\sqrt{\frac{6{,}828}{100}}\leq m\leq 4{,}3+1{,}96\times\sqrt{\frac{6{,}828}{100}}\right)=0{,}95$$

$$\Rightarrow P(3{,}78\leq m\leq 4{,}81)=0{,}95.$$

Interprétation : On a 95 chance sur 100 pour que la moyenne m de la population soit comprise entre 3,78 et 4,81.

**EX 4 :** on a d'après l'énoncé de l'exercice :

$\bar{x} = 100$, $n = 36$ et $\sigma = 24$. on cherche à estimer la moyenne $m$ de la population par intervalle de confiance.

l'intervalle de confiance de $m$ au seuil de $1 - \alpha$ est formulé comme suit :

$$P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})} \leq m \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})}\right) = 1 - \alpha \quad (1)$$

puisque le tirage est avec remise, la taille de l'échantillon $n = 36$ et $\sigma_{(x)} = \sigma = 24$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (2)$$

- Détermination de la valeur de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est inconnue, d'après le théorème central limite : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 $(n > 30)$, quelque soit la loi suivie par $X$, l'échantillon prélevé de cette population va suivra une loi normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma_{(\bar{x})}$. En effet :

$$\bar{X} \sim N\left(E(\bar{x}); \sigma_{(\bar{x})}\right) \Rightarrow \left(\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma_{(\bar{x})}}\right) = T \sim N(0,1)$$

par conséquent, la valeur de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale centrée réduite ($\mathcal{N}(0;1)$) pour les différents seuils de risque $\alpha$ :

- pour $\alpha = 10\% \Rightarrow 1 - \frac{10\%}{2} = 0,95 \Rightarrow F(z) = 0,95 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$ ;
- pour $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow F(z) = 0,975 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ ;
- pour $\alpha = 1\% \Rightarrow 1 - \frac{1\%}{2} = 0,995 \Rightarrow F(z) = 0,995 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ ;

Si on remplace $\bar{x}$ ; $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ; $\sigma$ et $n$ par leurs valeurs dans la relation (2), les intervalles de confiance de la moyenne $m$ de la population en fonction des différents niveaux de risque $\alpha$ sont données dans le tableau suivant :

| Niveau de confiance $1-\alpha$ | $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | Intervalles de confiance de $m$ |
|---|---|---|
| 90 % | 1,64 | $P(93,44 \leq m \leq 106,56) = 0,90$ |
| 95 % | 1,96 | $P(92,16 \leq m \leq 107,84) = 0,95$ |
| 99 % | 2,58 | $P(89,68 \leq m \leq 110,32) = 0,99$ |

<u>Conclusion</u> : D'après ce tableau on constate qu'au fur et à mesure que le niveau de confiance augmente (le risque diminue), l'intervalle de confiance s'élargit. Autrement dit, plus l'intervalle de confiance est large, plus la probabilité pour que la moyenne de la population $m$ soit à l'intérieur de l'intervalle est grande.

**Ex : 5** soit la variable aléatoire X qui désigne le poids des étudiants de cette classe :
D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

- La taille de la population N = 72 et celle de l'échantillon n = 36 ;
- la moyenne observée sur l'échantillon de 36 étudiante est $\bar{X} = 60$ kg ;
- l'écart-type de la population est $\sigma = 2$ kg ;
- le niveau de confiance est $1-\alpha = 90\%$.

l'intervalle de confiance de m au seuil de $1-\alpha$, est formulé comme suit :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{X})} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{X})}\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

puisque le tirage est sans remise.

Remarque : On a considéré un tirage sans remise car le coefficient d'exhaustivité n'est pas proche de 1.

Res : $\frac{N-n}{N-1} = \frac{72-36}{71} \simeq 0,5$.

$N=72$, $n=36$ et $\sigma_{(X)}=\sigma=2$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\leq m\leq\bar{x}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)=1-\alpha \quad (2)$$

- Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est inconnue, d'après le théorème centrale limite : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n\geq 30$), quelque soit la loi suivie par $X$, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma_{(\bar{x})}$.

En effet :

$$\bar{X}\leadsto N\left(E(\bar{X});\sigma_{(\bar{X})}\right)\Rightarrow\frac{\bar{X}-E(\bar{X})}{\sigma_{(\bar{X})}}\leadsto N(0;1)$$

par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale centrée réduite $(N(0,1))$.

Donc la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est lue sur cette table comme suite ;

$$\alpha=10\%\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{10\%}{2}=0,95\Rightarrow F(Z)=0,95\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1,64.$$

Si on remplace $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $\sigma$, N et n par leurs valeurs dans la relation (2), l'intervalle de confiance de la moyenne <u>m</u> de la population au risque de 10% est donné comme suit :

$$P\left(60 - 1,64 \times \frac{2}{\sqrt{36}} \times \sqrt{\frac{72-36}{72-1}} \leq m \leq 60 + 1,64 \times \frac{2}{\sqrt{36}} \times \sqrt{\frac{72-36}{72-1}}\right) = 0,90$$

$$P\left(59,61 \leq m \leq 60,38\right) = 0,90$$

<u>Interprétation</u> : on a 90 chances sur 100 pour que le poids moyen de tous les étudiants de la classe soit compris entre :
59,61 et 60,38 kg.

**EX: 6** soit la v.a X qui désigne le loyer mensuel de chambres d'étudiants. D'après l'énoncé de l'exercice on a :

- la taille de la population $N=300$ et celle de l'échantillon $n=40$ ;
- la moyenne observée sur l'échantillon de 40 chambres est $\bar{x}=600$ DH
- l'écart-type de l'échantillon (empirique) est $S=100$ Dirhams.
- le niveau de confiance est $1-\alpha = 95\%$.

l'intervalle de confiance de m au seuil de $1-\alpha$ est formulé comme suit :

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})} \leq m \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})}\right) = 1-\alpha \qquad (1)$$

puisque le tirage est sans remise (voir remarque EX : ....)

$N=300$ ; $n=40$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq m \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha \qquad (2)$$

Etant donné que $\sigma$ est inconnu, on va l'estimer par $\hat{S}'$.
en effet, la relation (2) prendra la forme suivante :

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{S}'}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq m \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{S}'}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha \qquad (3)$$

• Estimation de $\sigma$ :

puisque l'écart-type $\sigma$ de la population est <u>inconnu</u> on va le remplacer par son estimateur sans biais dans le cas d'un tirage sans remise $\hat{S}'$.

avec :

$$\hat{S}' = \sqrt{\hat{S}^2 \times \frac{N-1}{N}} = \sqrt{S^2 \times \frac{n}{n-1} \times \frac{N-1}{N}}$$

$$= \sqrt{(100)^2 \times \frac{40}{39} \times \frac{299}{300}}$$

$$= 101{,}105.$$

• Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

puisque la loi de la v.a X définie au niveau de la population est <u>inconnue</u>, d'après le théorème central limite : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n > 30$), quelque soit la loi suivie par X, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma_{(\bar{x})}$. En effet :

$$\bar{X} \leadsto N\left(E(\bar{x})\,;\,\sigma_{(\bar{x})}\right) \Rightarrow \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma_{(\bar{x})}} \leadsto N(0;1).$$

Par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale $N(0;1)$.

Donc la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est lue sur cette table comme suit : $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0{,}975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

Si on remplace $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $S'$, $N$ et $n$ par leurs valeurs dans la relation (3), l'intervalle de confiance de la moyenne $m$ de la population au risque de 5% est donné comme suit :

$$P\left(600 - 1{,}96 \times \frac{100{,}105}{\sqrt{40}} \times \sqrt{\frac{300-40}{299}} \leq m \leq 600 + 1{,}96 \times \frac{100{,}105}{\sqrt{40}} \times \sqrt{\frac{300-40}{299}}\right) = 0{,}95$$

$$P(571{,}071 \leq m \leq 628{,}928) = 0{,}95$$

Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que le loyer mensuel moyen du secteur soit compris entre 571,071 et 628,928 DH.

## EX : 7

Soit la v.a X qui désigne la puissance d'une machine.
D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

$E(X) = m$ ; $\sigma_{(X)} = \sigma$ , $n = 5$ ; $X \sim N(E(X); \sigma(X))$.

Les limites recherchées sont données par l'intervalle de confiance de la moyenne m de l'ensemble des machines au risque de 5% comme suit :

$$P\left(\bar{x} - t_{(\frac{\alpha}{2})} \times \underline{\underline{\sigma_{(\bar{x})}}} \leq m \leq \bar{x} + t_{(\frac{\alpha}{2})} \times \underline{\underline{\sigma_{(\bar{x})}}}\right) = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$P\left(\bar{x} - t_{(\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{(\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha . \quad (2)$$

Puisque l'écart-type $\sigma$ de la population est inconnu, on va le remplacer par son estimateur sans biais dans le cas d'un tirage avec remise $\underline{\underline{S' = \hat{S}}}$ :

$$P\left(\bar{x} - \left(t_{(\frac{\alpha}{2})} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot \frac{S'}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S'}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (3)$$

avec : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum^{5} x_i}{n} = \dfrac{3550 + 3560 + 3580 + 3600 + 3620}{5} = 3582$ .

$\hat{S} = S' = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\dfrac{(3550 - 3582)^2 + \dots + (3620 - 3582)^2}{4}} = 28,64$

• Détermination de la valeur de $t_{(\frac{\alpha}{2})} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ?

Puisque la variable aléatoire X définie au niveau de la population suit une loi normale de variance $\sigma^2$ inconnue $(X \sim N(m, \sigma))$ ; et d'après le T.C.L, l'échantillon prélevé de cette population va suivre la loi de $\underline{\underline{\text{Student}}}$ à $\underline{n-1}$ degrés de liberté $(\underline{d.d.l = 4})$.

En effet : $x \sim N(m, \sigma) \rightarrow \bar{x} \sim N(E(\bar{x}) ; \sigma(\bar{x}))$.

Ce qui implique : $\left(\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} \rightsquigarrow St(n-1)\right)$

par conséquent la valeur de $\left(t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ sera déterminée à partir de la table de St à $n-1$ degrés de liberté au risque $\alpha = 5\%$.

Donc, avec : $\begin{cases} \alpha = 5\% \\ d.d.l = 4 \end{cases} \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 2,776$.

Si on remplace $\bar{x}$; $\left(t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$; $S'$ et $n$ par leurs valeurs dans la relation (3), on aura donc :

$$P\left(3582 - 2,776 \times \frac{28,64}{\sqrt{5}} \leq m \leq 3582 + 2,776 \times \frac{28,64}{\sqrt{5}}\right) = 0,95$$

$$P(3546,44 \leq m \leq 3617,55) = 0,95$$

Interprétation : On a 95 chances sur 100 pour que la puissance moyenne de l'ensemble des machines soit comprise entre 3546,44 et 3617,55 watts.

## Ex: 9

Soit la variable aléatoire $X$ qui désigne la longueur des pièces.

D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

$$E(X) = m = 20 \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2 = 4.$$

1. L'intervalle de confiance de la moyenne $m$ de la population au risque de 5% pour un échantillon de taille 100 est donné comme suit :

$$P\left(\bar{x} - t_{(\frac{\alpha}{2})} \times \sigma(\bar{x}) \leq m \leq \bar{x} + t_{(\frac{\alpha}{2})} \times \sigma(\bar{x})\right) = 1 - \alpha. \quad (1)$$

$$P\left(\bar{x} - t_{(\alpha/2)} \times \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{(\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (2)$$

avec $\left(t_{\alpha/2} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

♦ Détermination de la valeur de $\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ ?

Puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est inconnue, d'après le T.C.L : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 $(n > 30)$, quelque soit la loi suivie par $X$, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi $N$ normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma(\bar{x})$. En effet :

$$\bar{X} \sim N\left(E(\bar{X}) ; \sigma(\bar{x})\right) \Longrightarrow \left(\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})}\right) = T \sim N(0, 1).$$

par conséquent, la valeur de $t_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sera déterminée à partir de la table de la loi $N \Longrightarrow$ loi Normale centrée réduite. $(N(0,1))$ comme suit :

* Pour $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

Si on remplace $\bar{x}(=m)$ ; $Z_{1-\alpha} = t_{\frac{\alpha}{2}}$ ; $\sigma$ et $n$ par leurs valeurs. dans la relation (2) ; on aura donc :

$$P\left(20 - 1,96 \times \sqrt{\frac{4}{100}} \leq m \leq 20 + 1,96 \times \sqrt{\frac{4}{100}}\right) = 0,95$$

$$P\left(19,608 \leq m \leq 20,392\right) = 0,95.$$

Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que la longueur moyenne m de l'ensemble des pièces fabriqués par cette machine soit comprise entre 19,608 et 20,392 cm.

2. Dans ce cas, la taille de l'échantillon $n=25$ et $X \rightsquigarrow N(m;\sigma)$ de paramètres connus, avec $m=20$ et $\sigma^2=4$. Donc, d'après le T.C.L : si la taille de l'échantillon est inférieure à 30 ($n<30$), et la loi suivie par X est normale de paramètres connus, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma(\bar{x})$. En effet : $\bar{x} \rightsquigarrow N(E(\bar{x}); \sigma(\bar{x})) \Rightarrow \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} \rightsquigarrow N(0,1)$.
Par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sera lue dans la table de la loi normale centrée réduite $(N(0,1))$. comme suit,

* Pour $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Si on remplace $\bar{x}(=m)$ ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{\alpha}{2}}$ ; $\sigma$ et $n$ par leurs valeurs dans la relation (2) on aura donc :

$$P\left(20 - 1,96 \times \sqrt{\frac{4}{25}} \leq m \leq 20 + 1,96 \times \sqrt{\frac{4}{25}}\right) = P\left(19,216 \leq m \leq 20,784\right) = 0,95.$$

Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que la longueur moyenne m de l'ensemble des pièces fabriqués par cette machine soit comprise entre 19,216 et 20,784 cm.

3. Dans ce cas; la taille de l'échantillon est très petite $n=10$ et $X \sim N(m\,;\,\sigma(x))$ de paramètres inconnus. Dans ce cas; il faut calculer $\bar{x}$, estimer $\sigma$ par $S'$ et déterminer $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

- Détermination de $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{22+22+\dots+18}{10} = 19,6 \text{ cm}$$

- Estimation $\sigma$ par $S'$ :

On sait que l'estimateur sans biais de $\sigma$ est donné dans le cas d'un tirage avec remise par $S'$, avec :

$$S' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(22-19,6)^2+\dots\dots+(18,19,6)^2}{9}}.$$

Donc $S' = 3,29$ cm.

- Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{\alpha/2}$.

$\Rightarrow$ puisque la v.a $X$ définie au niveau de la population suit la loi Normal de variance $\sigma^2$ inconnue $(X \sim N(m,\sigma))$, et d'après le T.C.L. l'échantillon prélevé de cette population va suivre la loi $St(n-1)$ d.d.l $(=9)$ ; En effet $X \sim N(m,\sigma) \to \bar{x} \sim N(E(\bar{x}); \sigma(\bar{x}))$.

$$\Rightarrow : \frac{\bar{x}-E(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} \sim St(n-1)$$

$$\Rightarrow \text{Donc, avec : } \begin{cases} \alpha = 5\% \\ d.d.l = 9 \end{cases} \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{\alpha/2} = 2,262.$$

Si on remplace $\bar{x}$ ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ; $S'$ ; $n$ par leur valeur dans (2), on aura donc :

$$P\left(19,6-2,262 \times \frac{3,29}{\sqrt{10}} \leq m \leq 19,6+2,262 \times \frac{3,29}{\sqrt{10}}\right) = 0,95.$$

$$\Rightarrow P(17,24 \leq m \leq 21,95) = 0,95$$

- Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que la longueur moyenne des pièces reçues soit comprise entre 17,24 et 21,95 cm.

# EX:10

Soit la v.a X qui désigne le prix de vente des maisons dans une résidence :

D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

$$\bar{x} = 148000 ;\ S = 62000 ;\ n = 25 ;\ X \leadsto \mathcal{N}(E(X) ; \sigma(X)).$$

1. L'intervalle de confiance du prix de vente moyen $\underline{\underline{m}}$ des maisons dans une résidence au risque de 5% est donné comme suit :

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x}) \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x})\right) = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (2)$$

Puisque l'écart-type $\sigma$ de la population est $\underline{\underline{\text{inconnu}}}$, on va le remplacer par son estimateur sans biais dans le cas d'un tirage avec remise $\hat{S}$ :

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (3)$$

* Estimation de l'écart-type $\sigma$ :

On sait que l'estimation sans biais de l'écart-type $\underline{\underline{\sigma}}$ de la population est donné dans le cas d'un tirage avec remise par $\hat{S}$ :

$$\hat{S} = S \times \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 62000 \times \sqrt{\frac{25}{25-1}} = 63278{,}485.$$

** Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Puisque la v.a X définie au niveau de la population suit une loi normale d'écart-type $\underline{\underline{\sigma \text{ inconnu}}}$ ($X \leadsto \mathcal{N}(m, \sigma)$) $\Rightarrow$

puisque $\sigma$ inconnu $\Rightarrow$ d'après le T.C.L, l'échantillon prélevé de cette population va suivre la loi de $St_{(n-1)}$ (d.d.l = 24). En effet :

$$X \rightsquigarrow \mathbb{N}(m ; \sigma) \Rightarrow \bar{x} \rightsquigarrow \mathbb{N}(E(\bar{x}) ; \sigma(\bar{x})) \Rightarrow \left(\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})}\right) \rightsquigarrow St_{(n-1)}.$$

par conséquent la valeur de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sera déterminée à partir de la table de $St_{(n-1)}$ degrés $\ell$ au risque $\alpha = 5\%$.

Donc, avec $\begin{cases} \alpha = 5\% \\ d.d.l = 24 \end{cases} \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}064$.

Si on remplace $\bar{x}$ ; $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ; $S$ ; $n$ par leurs valeurs dans la relation (3), on aura donc :

$$\mathbb{P}\left(148000 - 2{,}064 \times \frac{63278{,}485}{\sqrt{25}} \leq m \leq 148000 + 2{,}064 \times \frac{63278{,}485}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(121878{,}6414 \leq m \leq 174121{,}3586) = 0{,}95$$

Interprétation : On a 95 chances sur 100 pour que le prix de vente moyen $m$ de l'ensemble des maisons vendues soit compris entre : 121878,6414 et 174121,3586 DHs.

2. le prix d'achat de cette maison par cette personne de 206000 DHs se trouve à l'extérieur de l'intervalle de confiance obtenu auparavant, donc ce n'est pas une information plausible. Elle est évidemment entachée d'erreur puisqu'il y a déjà un risque de 5% et cette information pourrait constituer une observation aberrante.

# Ex : 11

Soient les v.a suivantes :

$X$ : désigne le nombre des coups de téléphones au cours d'une période donnée ;

$f = \frac{X}{n}$ : désigne la fréquence observée des coups de téléphone au cours d'une période.

D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

$N = 7420$ ; $n = N \times \frac{1}{5} = 7420 \times \frac{1}{5} = 1484$ ; $f = \frac{X}{n} = \frac{208}{1484} = 14\%$..

→ L'intervalle de confiance de la proportion $\underline{\underline{p}}$ des coups de téléphones au cours de la période au risque de 5% est donné comme suit :

$$\mathbb{P}\left(f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f) \leq p \leq f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f)\right) = 1 - \alpha \quad (1)$$

puisque le tirage est sans remise, $N = 7420$, $n = 1484$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$\mathbb{P}\left(f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{pq}{n} \times \frac{N-n}{N-1}} \leq p \leq f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n} \frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha \quad (2)$$

* Estimation de $\sigma_{(f)}$ :

puisque $p$ est inconnue, on va remplacer $\sigma_{(f)}$ par son estimateur sans biais dans le cas d'un tirage sans remise, avec :

$$\sigma_{(f)} = \sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right) \times \left(\frac{S^2}{n}\right)} = \sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right) \times \left(\frac{f(1-f)}{n-1}\right)}.$$

$$\Rightarrow \sigma(f) = \sqrt{\left(\frac{7420-1484}{7420}\right)\left(\frac{0,14(1-0,14)}{1484-1}\right)} = 8,06 \times 10^{-3}$$

* Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est inconnue, d'après le T.C.L : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n > 30$), quelque soit la loi suivie par $X$, la fréquence observée va suivre une loi normale de paramètres $E(f)$ et $\sigma(f)$. En effet :

$$f \leadsto \mathbb{N}(E(f); \sigma(f)) \Rightarrow \left(\frac{f - E(f)}{\sigma(f)}\right) \leadsto \mathbb{N}(0,1)$$

par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sera déterminée à partir de la table de la loi normale centrée réduite ($N(0,1)$) comme suit :

$\rightarrow$ pour $\alpha = 5\% \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow F(t) = 0,975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

si on remplace $f$ ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ et $\sigma_{(f)}$ par leurs valeurs dans la relation (1) ; on aura donc :

$$P\left(0,14 - 1,96 \times 8,06 \times 10^{-3} \leq p \leq 0,14 + 1,96 \times 8,06 \times 10^{-3}\right) = 0,95$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(0,124 \leq p \leq 0,156) = 0,95.$$

Interprétation ;

on a 95 chances sur 100 pour que la population de coups de fils qui n'ont pu être satisfait au cours de la périods soit comprise entre 12,4 % et 15,6 %.

## Ex : 12

1. X est une v.a qui désigne le nombre de personnes satisfaites dans leur travail.

2. puisqu'on a :

→* Deux éventualités mutuellement exclusives :

- les personnes satisfaites dans leur travail, avec une proportion $p = 0,7$ ;
- Les personnes qui ne sont pas satisfaits dans leur travail, avec une proportion $q = 1 - p = 0,3$.

→* Un tirage indépendant ou avec remise ;

→* La taille de l'échantillon $n = 400$ ;

→* La probabilité p est fixe.

Donc, $X \rightsquigarrow B(n;p) \Rightarrow E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Avec $n = 400$ et $p = 0,7 \Rightarrow X \rightsquigarrow B(400;0,7)$. En effet :

* $E(X) = 400 \times 0,7 = 280$ ;
* $V(X) = npq = 400 \times 0,7 \times 0,3 = 84 \Rightarrow \sigma(X) = 9,16$.

3. On sait que pour n très grande, p ni trop proche de 0, ni trop proche de 1, Alors la loi $B(n;p)$ est très proche de la loi normale $N(m;\sigma)$ où $m = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$ ;

Avec $m = 100$ et $p = 0,7 \Rightarrow X \rightsquigarrow B(100;0,7)$. En effet :

$E(X) = 100 \times 0,7 = 700$;

$V(X) = npq = 100 \times 0,7 \times 0,3 = 21 \Rightarrow \sigma(X) = 4,58$

Donc : $X \rightsquigarrow B(100;0,7) \Rightarrow X \rightsquigarrow \mathbb{N}(70;4,58)$

=> L'intervalle de confiance de X au risque α est donné comme suit :

$$\mathbb{P}\left(E(X) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(X) \leq X \leq E(X) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(X)\right) = 1 - \alpha \qquad (1)$$

* Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la variable aléatoire X définie au niveau de la population est approchée par une loi normale d'écart-type σ connu $\left(X \rightsquigarrow \mathbb{N}(np ; \sqrt{npq})\right)$ ; En effet :

$$X \rightsquigarrow \mathbb{N}(np ; \sqrt{npq}) \Rightarrow \left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}}\right) \rightsquigarrow \mathbb{N}(0 ; 1)$$

par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale centrée réduite $\mathbb{N}(0 ; 1)$ comme suit :

$\rightarrow$ Pour $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow F(t) = 0,975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

si on remplace $E(X)$ ; $\sigma(X)$ ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ par leur valeurs dans la relation (1) ; l'intervalle de conffiance de la variable X au risque de 5% est donné comme suit :

$$P(70 - 1,96 \times 4,58 \leq X \leq 70 + 1,96 \times 4,58) = 0,95$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(61 \leq X \leq 79) = 0,95.$$

Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que le nombre de personnes satisfaites dans leur travail soit compris entre 61 et 79 personnes.

4. Soit la v.a $f = \frac{X}{n}$ qui désigne la fréquence observée des personnes satisfaits dans leur travail.

puisque f est un estimateur sans biais de la proportions p

⇒ puisque $f$ est un estimateur sans biais de la proportion $p$ des personnes satisfaits dans leur travail au niveau de la population, on admet que : pour $n = 400 \Rightarrow E(f) = p \Rightarrow f = 0{,}7$.

L'intervalle de confiance de la proportion $\underline{\underline{p}}$ des personnes satisfaits dans leur travail au risque de 5 % est donné comme suit :

$$\mathbb{P}\left(f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f) \leq p \leq f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f)\right) = 1 - \alpha \qquad (1)$$

puisque le tirage est avec remise, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$\mathbb{P}\left(f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq p \leq f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 1 - \alpha. \qquad (2)$$

* Détermination de la valeur de $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est $\underline{\underline{\text{inconnue}}}$ ; d'après le $\underline{\underline{\text{T.C.L}}}$ : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n > 30$) → quelque soit la loi suivie par $X$, la fréquence observée va suivre une loi normale de paramètres $E(f)$ et $\sigma(f)$. En effet :

$$f \leadsto \mathbb{N}(E(f); \sigma(f)) \Rightarrow \left(\frac{f - E(f)}{\sigma(f)}\right) \leadsto \mathbb{N}(0; 1).$$

par conséquent, la valeur de $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sera déterminée à partir de la table de la loi normale centrée réduite $(N(0,1))$ comme suit :

→ $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{5\%}{2} = 0{,}975 \Rightarrow F(t) = 0{,}975 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

Si on remplace $f$ ; $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ; $p$ par leur valeurs dans la relation (1)

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(0{,}7 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}7 \times 0{,}3}{400}} \leq p \leq 0{,}7 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}7 \times 0{,}3}{400}}\right) = 0{,}95$$

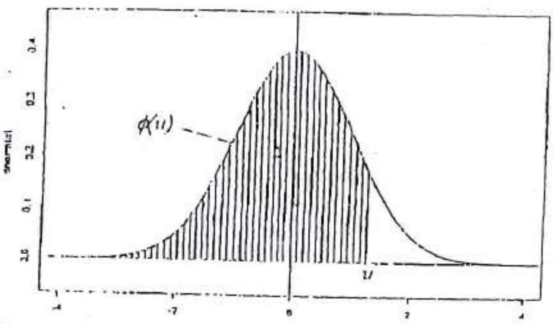
$$\Rightarrow \mathbb{P}(0{,}655 \leq p \leq 0{,}745) = 0{,}95$$

→ Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que la proportion des personnes satisfaits dans leur travail soit comprise entre 65,5 % et 74,5 %.

# TABLE 1 DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

$U$ étant une variable aléatoire de loi $N(0,1)$, la table donne la valeur de $\Phi(u) = P(U \leq u)$.

En R, la commande correspondante est pnorm(u).




| $u$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |

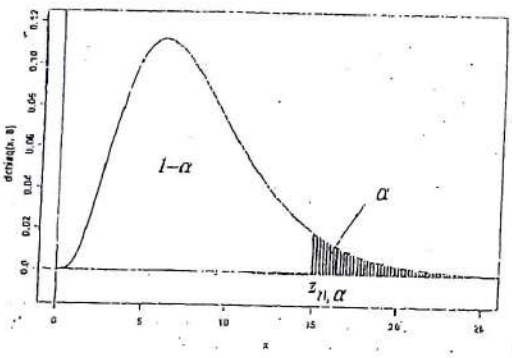
Grandes valeurs de $u$

| $u$ | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 |
|---|---|---|---|---|
| $\Phi(u)$ | 0.9987 | 0.99977 | 0.999968 | 0.999997 |

# TABLE DE LA LOI DU $\chi^2$

$X$ étant une variable aléatoire de loi du $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté, et $\alpha$ un réel de $[0,1]$, la table donne la valeur $z_{n,\alpha} = F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)$, telle que $P(X > z_{n,\alpha}) = \alpha$.

En R, la commande correspondante est `qchisq(1-alpha,n)`.




| $n$ \ $\alpha$ | 0.995 | 0.990 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00004 | 0.0002 | 0.001 | 0.004 | 0.02 | 0.06 | 0.15 | 0.46 | 1.07 | 1.64 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 | 10.80 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 0.45 | 0.71 | 1.39 | 2.41 | 3.22 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 | 13.82 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 1.01 | 1.42 | 2.37 | 3.66 | 4.64 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 | 16.27 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 1.65 | 2.19 | 3.36 | 4.88 | 5.99 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 | 18.47 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 2.34 | 3.00 | 4.35 | 6.06 | 7.29 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 | 20.52 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.07 | 3.83 | 5.35 | 7.23 | 8.56 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 | 22.46 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 3.82 | 4.67 | 6.35 | 8.38 | 9.80 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 | 24.32 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 4.59 | 5.53 | 7.34 | 9.52 | 11.03 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 | 26.12 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.38 | 6.39 | 8.34 | 10.66 | 12.24 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 | 27.88 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.18 | 7.27 | 9.34 | 11.78 | 13.44 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 | 29.59 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 6.99 | 8.15 | 10.34 | 12.90 | 14.63 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 | 31.26 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 7.81 | 9.03 | 11.34 | 14.01 | 15.81 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 | 32.91 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 8.63 | 9.93 | 12.34 | 15.12 | 16.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 | 34.53 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 9.47 | 10.82 | 13.34 | 16.22 | 18.15 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 | 36.12 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 10.31 | 11.72 | 14.34 | 17.32 | 19.31 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 | 37.70 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.15 | 12.62 | 15.34 | 18.42 | 20.47 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 | 39.25 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 12.00 | 13.53 | 16.34 | 19.51 | 21.61 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 | 40.79 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 12.86 | 14.44 | 17.34 | 20.60 | 22.76 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 | 42.31 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 13.72 | 15.35 | 18.34 | 21.69 | 23.90 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 | 43.82 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 14.58 | 16.27 | 19.34 | 22.77 | 25.04 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 | 45.31 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 15.44 | 17.18 | 20.34 | 23.86 | 26.17 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 | 46.80 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 16.31 | 18.10 | 21.34 | 24.94 | 27.30 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 | 48.27 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 17.19 | 19.02 | 22.34 | 26.02 | 28.43 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 | 49.73 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 18.06 | 19.94 | 23.34 | 27.10 | 29.55 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 | 51.18 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 18.94 | 20.87 | 24.34 | 28.17 | 30.68 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 | 52.62 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 19.82 | 21.79 | 25.34 | 29.25 | 31.79 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 | 54.05 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 20.70 | 22.72 | 26.34 | 30.32 | 32.91 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 | 55.48 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 21.59 | 23.65 | 27.34 | 31.39 | 34.03 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 | 56.89 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 22.48 | 24.58 | 28.34 | 32.46 | 35.14 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 | 58.30 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 23.36 | 25.51 | 29.34 | 33.53 | 36.25 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 | 59.70 |

Pour $n > 30$, on admet que :

$$z_{n,\alpha} \approx \frac{1}{2}\left(u_{2\alpha} + \sqrt{2n-1}\right)^2 \text{ si } \alpha < \frac{1}{2}$$

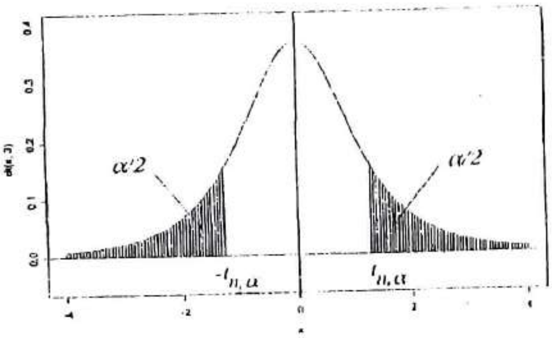
$$z_{n,\alpha} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n-1} - u_{2(1-\alpha)}\right)^2 \text{ si } \alpha \geq \frac{1}{2}$$

# TABLE DE LA LOI DE STUDENT

$X$ étant une variable aléatoire de loi $St(n)$ et $\alpha$ un réel de $[0,1]$,

la table donne la valeur $t_{n,\alpha} = F^{-1}_{St(n)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ telle que $P(|X| > t_{n,\alpha}) = \alpha$.

En R, la commande correspondante est qt(1-alpha/2,n). $t_{+\infty,\alpha} = u_\alpha$




| $n$ \ $\alpha$ | 0.90 | 0.80 | 0.70 | 0.60 | 0.50 | 0.40 | 0.30 | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.158 | 0.325 | 0.510 | 0.727 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.62 |
| 2 | 0.142 | 0.289 | 0.445 | 0.617 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.599 |
| 3 | 0.137 | 0.277 | 0.424 | 0.584 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 0.134 | 0.271 | 0.414 | 0.569 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.132 | 0.267 | 0.408 | 0.559 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.869 |
| 6 | 0.131 | 0.265 | 0.404 | 0.553 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 0.130 | 0.263 | 0.402 | 0.549 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | 0.130 | 0.262 | 0.399 | 0.546 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 0.129 | 0.261 | 0.398 | 0.543 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 0.129 | 0.260 | 0.397 | 0.542 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 0.129 | 0.260 | 0.396 | 0.540 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.128 | 0.259 | 0.395 | 0.539 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.128 | 0.259 | 0.394 | 0.538 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.537 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.536 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.128 | 0.258 | 0.392 | 0.535 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.128 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.127 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.532 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.768 |
| 24 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | $\boxed{2.064}$ | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.531 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.126 | 0.255 | 0.388 | 0.529 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 80 | 0.126 | 0.254 | 0.387 | 0.527 | 0.678 | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.416 |
| 120 | 0.126 | 0.254 | 0.386 | 0.526 | 0.677 | 0.845 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| $+\infty$ | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |