***Université Abdelmalek Essaâdi*,**
Faculté .S.J.E.S Tétouan ,
Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion.
Année universitaire : 2020.-2021

Travaux Dirigés 3 :
Chapitre 3

Exercice 1:
Supposons qu'une population est constituée des unités statistiques dont le caractère mesurable de chacun est:

$$x_1 = 2;\ \ x_2 = 4;\ \ x_3 = 6;\ \ x_4 = 8;\ \ x_5 = 10.$$

1.Quelles sont la taille N de la population, la moyenne et la variance ?
2.On veut prélever de cette population des échantillons de taille $n = 2$ en effectuant un tirage sans remise et calculer la moyenne de chacun.
3. Déterminer les paramétres de la distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$
4. Laquelle des deux relations peut-on vérifier?

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad ou \quad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.\frac{N-n}{N-1}$$

5. Quel est le taux de sondage? Doit-on ignorer le facteur de correction pour le calcul de $V(X)$

Exercice 2:
On suppose que les poids de 3000 étudiants d'une université suivent une loi normale de moyenne 68kg et d'écart-type 3kg.
1.Quelle est la moyenne et l'écart-type d'échantillonnage des moyennes si l'on extrait 80 échantillons de 25 étudiants chacun.
a) Dans le cas d'un tirage non exhaustif.
b) Dans le cas d'un tirage exhaustif
2. Pour combien d'échantillons peut-on s'attendre à trouver une moyenne:
a) Comprise entre 68,3kg et 68,8kg
b) Inférieure à 68,4kg.

Exercice 3:
Le directeur de ressources humaines d'une entreprise a établi que les résultats à un test mesurant la dextérité manuelle de la main d'oeuvre affectée à des taches d'assemblages de pièces complexes sont distribués d'après la loi normale de moyenne $m = 72$ et de variance $\sigma^2 = 36$.
1.Quelle est la probabilité qu'un employé sélectionné au hasard obtienne un résultat inférieur à 63 au test de dextérité manuelle?
2.Un échantillon aléatoire de 25 employés a subi le test de dextérité manuelle.
i) Quelle est la distribution de la moyenne de l'échantillon?
ii) Quels sont la moyenne et l'écart-type de la distribution de la moyenne ?
3.Quelle est la probabilité que la moyenne de cet échantillon se situe entre 69 et 75 ?
4.Quelle est la probabilité que l'écart- entre la moyenne de cet échantillon et celle de la population soit supérieur à 3 ?

Exercice 4:
L'écart-type des poids d'une très grande population d'étudiants est 10 kg. On tire des échantillon de 200 étudiants chacun et l'on calcule l'écart-type des poids de chaque échantillon.
1. Evaluer la moyenne et l'écart-type de la distribution d'échantillonnage des écart-type des poids.
2. Quel pourcentage d'échantillons qui présente un écart-type:
a) Inférieur à 11 kg
b) Inférieur à 8,8 kg.

Exercice 5:

Un bureau de conseil en organisation et méthodes auprès des entreprises a mis au point un système d'appréciation ou d'évaluation de cadres d'entreprise. Diverses caractéristiques des cadres sont évaluées et on a établi sur une période de quatre ans que le score global à cette batterie de tests était distribué normalement avec une moyenne $m = 600$ et un écart-type $\sigma = 50$. Supposons qu'on fait subir à un échantillon aléatoire de 25 cadres d'une multinationale l'ensemble des tests.

1.Caractériser la distribution d'échantillonnage de la moyenne en précisant la forme, la moyenne et la variance.

2.Quelle est la probabilité que la moyenne de cet échantillon soit comprise entre 590 et 610 ?.

3.Dans 95% des cas, autour de m, la moyenne d'échantillon peut varier entr quelle valeurs?.

Exercice 6:

On suppose que les étudiants d'un cours de Echantillonnage, Estimation aient des notes normalement distribuées avec une moyenne $m = 72$ et un écart-type $\sigma = 9$.

1. Trouver la probabilité pour qu'un seul étudiant choisit au hasard ait une note supérieure à 80.
2. Trouver la probabilité pour qu'un échantillon aléatoire de 10 étudiants ait une note moyenne supérieure à 80.

3.Répondre à la question précédente (2.) en supposant que la population ne suit pas une loi normale.

Exercice 7:

Au cours d'une élection 53, 9% des électeures ont voté pour le candidat A. Si un sondage sur 1000 électeurs choisis au hasard avait été réalisé avant le vote.

Quelle est la probabilité de prévoir à tort l'échec du candidat A ?

Exercice 8:

La taille d'une population d'étudiants suit une loi normale de moyenne égale à 1,70 m et un écart-type égale à 0,8 m. Si un échantillon de 10 étudiants est prélevé,

Quelle est la probabilité pour que la moyenne de l'échantillon s'écarte de 6 cm de la moyenne de la population m.

* Corrigés des exercices *

TD$_3$: S_3 * 2020 - 2021 *

EX : 1

1. La taille $N = 5$

la moyenne $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 6$; la variance $V(x) = \sigma^2_{(x)} = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \mu^2 = 8$

2. on a C_5^2 échantillons possibles, $C_5^2 = 10$

Échantillons	moyenne
$(2;4)$	$3 \leftarrow \bar{x}_1$
$(2;6)$	$4 \leftarrow \bar{x}_2$
$(2;8)$	5
$(2;10)$	6
$(4;6)$	5
$(4;8)$	6
$(4;10)$	7
$(6;8)$	7
$(6;10)$	8
$(6;10)$	9

3. $E(\bar{X}) = \frac{\sum \bar{x}_i}{10} = 6 = \mu$

$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{10} \sum \bar{x}_i^2 - \mu^2 = 3$

4. puisque la taille de l'échantillon dépasse 5% de la taille de la population.

$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{8}{4} \cdot \frac{5-2}{5-1}$
$= 3$

5. $\frac{n}{N} = \frac{2}{5} = 0,4$

le taux de sondage est égale à 40% on ne peut pas dans ce cas ingrer le facteur de correction.

Ex : 2 suit

$\Rightarrow$ et comprise entre 68,3kg et 68,8kg et calculé comme suit :

$$\mathbb{P}(68,3 \leq \bar{X} \leq 68,8) = \mathbb{P}\left(\frac{68,3-68}{0,6} \leq \frac{\bar{X}-68}{0,6} \leq \frac{68,8-68}{0,6}\right) \quad (*)$$

on pose : $Z = \dfrac{\bar{X}-68}{0,6} \rightsquigarrow N(0,1)$.

$$(*) \Rightarrow \mathbb{P}(0,5 \leq Z \leq 1,33) = \mathbb{P}(Z \leq 1,33) - \mathbb{P}(Z \leq 0,5)$$

$$= F_Z(1,33) - F_Z(0,5)$$

$$= 0,9066 - 0,6915.$$

$$= 0,2151.$$

D'où le nombres d'échantillon dont la moyenne et comprise entre : 68,3K et 68,8kg est égale à $80 \cdot 0,2151 = 17$ échantillon.

2.b : De la même façon, on va calculer le nombre d'échantillon dont la moyenne est inférieure à 68,4kg :

$$\mathbb{P}(\bar{X} \leq 68,4) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-68}{0,6} \leq \frac{68,4-68}{0,6}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 0,67)$$

$$= 0,7486$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bar{X} \leq 68,4) = 0,7486.$

D'où le nombre d'échantillon dont la moyenne est inférieurs à 68,4kg. est égal à $80 \times 0,7486 = ?$ échantillons.

EX: 2

D'après l'énoncé de l'exercice on a :

$N = 3000$; $m = 68$; $\sigma = 3$

X désigne le poids des étudiants, avec $X \rightsquigarrow N(m;\sigma)$

1. La moyenne et l'écart-type d'échantillonnage des moyenne si l'on extrait 80 échantillon de 25 étudiants chacun sont données comme suit :

a. Dans le cas d'un tirage non exhaustif :

$$E(\bar{X}) = m = 68 \text{ et } \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

b. Dans le cas d'un tirage exhaustif :

$$E(\bar{X}) = m = 68$$

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{3000-25}{3000-1}} \simeq \frac{3}{5} = 0,6$$

Il convient de noter que $\sigma(\bar{x})_{T.S.R} \simeq \sigma(\bar{x})_{T.AR}$ puisque le coefficient d'exhaustivité $\frac{N-n}{N-1} \sim 1$ et le rapport $\frac{n}{N} \sim 0$.

2. a : puisque $X \rightsquigarrow \mathbb{N}(m;\sigma) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N(E(\bar{x});\sigma_{(\bar{x})})$.

Donc, le nombre d'échantillons dont la moyenne ››

Ex:3

$m = 72 \; ; \; \sigma^2 = 36 \Rightarrow X \rightsquigarrow \mathbb{N}(72 ; 6)$

1. $\mathbb{P}(X < 63) = \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} < \frac{63 - m}{\sigma}\right)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{X - 72}{6} < \frac{63 - 72}{6}\right)$

$= \mathbb{P}(Z < -1,5)$

$= 1 - 0,933 = 0,0668$

$\underline{Rq}$: on pose: $Z = \frac{X - 72}{6} \Rightarrow Z \rightsquigarrow \mathbb{N}(0,1)$.

2. i) Distribution de la moyenne de l'échantillon :

$n = 25$

ii) $\overline{X} \rightsquigarrow \mathbb{N}\left(m ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \rightsquigarrow \mathbb{N}\left(72 ; \frac{6}{\sqrt{25}}\right) = \mathbb{N}(72 ; 1,2)$

3. $\mathbb{P}(69 < \overline{X} < 75) = \mathbb{P}\left(\frac{69 - 72}{1,2} < \frac{\overline{X} - 72}{1,2} < \frac{75 - 72}{1,2}\right)$

avec: $Z = \frac{\overline{X} - 72}{1,2} \rightsquigarrow \mathbb{N}(0,1)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{69 - 72}{1,2} < Z < \frac{75 - 72}{1,2}\right)$

$= 2\mathbb{P}(Z < 2,5) - 1 = 0,9876$.

4. $\mathbb{P}(|\overline{X} - 72| > 3) = 1 - \mathbb{P}(|\overline{X} - 72| < 3)$

$= 1 \; \mathbb{P}(69 < \overline{X} < 75)$

$= 1 - 0,9876$

$= 0,012$

EX : 4

L'échantillon peut être exhaustif sur une population finie ou non exhaustif sur une population infinie.

1. La théorie nous suggère que pour une taille de l'échantillon très grand :

$m_s = \sigma = 10$ et $\sigma_{(s)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{10}{\sqrt{400}} = 0{,}5$ kg avec m_s et

$m_s(\sigma) = 10$ $\sigma_{(s)}$ désignent respectivement, la moyenne et l'écart-type

$\sigma_s = \frac{\sigma(p)}{\sqrt{2n}}$ d'échantillonnage des écarts-type des poids.

2. La distribution d'échantillonnage des écart-type est sensiblement normale avec une moyenne de 10 et un écart-type de 0,5.

a. $$\mathbb{P}(\sigma_{(s)} < 11) = \mathbb{P}\left(\frac{\sigma(s) - E(\sigma(s))}{\sigma(s)} < \frac{11-10}{0{,}5}\right)$$

$$= \mathbb{P}(T < 2) = F_T(2) = 0{,}9772.$$

b. $$\mathbb{P}(\sigma_{(s)} < 8{,}8) = \mathbb{P}\left(\frac{\sigma(s) - E(\sigma(s))}{\sigma(s)} < \frac{8{,}8-10}{0{,}5}\right)$$

$$= \mathbb{P}(T < -2{,}4)$$

$$= 1 - F_T(2{,}5)$$

$$= 1 - 0{,}9918$$

$$= 0{,}0082$$

EX:5 On a $m = 600$; $\sigma = 50$; $n = 25$

1. $X \leadsto \mathbb{N}(600; 50)$

$\Rightarrow \bar{X} \leadsto \mathbb{N}\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \bar{X} \leadsto \mathbb{N}\left(600; \frac{50}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \bar{X} \leadsto \mathbb{N}(600; 10)$

$\Rightarrow E(\bar{X}) = 600$; $V(\bar{X}) = 100$

2. $\mathbb{P}(590 < \bar{X} < 610) = \mathbb{P}\left(\frac{590-600}{10} < \frac{\bar{X}-600}{10} < \frac{610-600}{10}\right)$

$= \mathbb{P}(-1 < Z < 1)$

$= 2\,\mathbb{P}(Z < 1) - 1$

$= 0,6826$

Rq : $Z = \frac{\bar{X} - 600}{10} \leadsto \mathbb{N}(0, 1)$.

3. Cherchons x tel que : $\mathbb{P}(|\bar{X} - m| < x) = 0,95$

$\mathbb{P}(\mu - x < \bar{X} < \mu + x) = 0,95$

$\Rightarrow \mathbb{P}(-x < \bar{X} - \mu < x) = 0,95$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-\frac{x}{10} < \frac{\bar{X} - \mu}{10} < \frac{x}{10}\right) = 0,95$

$\Rightarrow 2\,\mathbb{P}\left(Z < \frac{x}{10}\right) - 1 = 0,95$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(Z < \frac{x}{10}\right) = 0,975$

$\Rightarrow \frac{x}{10} = 1,96 \Rightarrow x = 19,6$

avec $\mu = E(\bar{X})$

$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} \leadsto \mathbb{N}(0,1)$

Or $\bar{X} \leadsto \mathbb{N}(600, 10)$

$\sigma(\bar{X}) = 10$.

$E(\bar{X}) = 600$.

EX : 6

1. soit la v.a X qui désigne les notes des étudiants.

D'après l'énoncé de l'exercice ; X suit une loi normale de paramètre : $E(X) = m = 72$ et $\sigma_{(X)} = 9 \Rightarrow X \leadsto \mathbb{N}(72 ; 9)$.

Donc la Probabilité pour qu'un seul étudiant choisit au hasard ait une note supérieure à 80 est calculée comme suit :

$$\mathbb{P}(X > 80) = \mathbb{P}\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} > \frac{80 - 72}{9}\right)$$

$$= \mathbb{P}(Z > 0,89) \quad \text{avec } Z \leadsto \mathbb{N}(0,1)$$

$$= 0,1867. \qquad Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

2. puisque $X \leadsto \mathbb{N}(72 ; 9) \Rightarrow \bar{X} \leadsto \mathbb{N}(E(\bar{X}) ; \sigma(\bar{X}))$.

avec : $E(\bar{X}) = E(X) = m = 72$ et $\sigma_{(\bar{X})} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$.

Donc la Prob pour qu'un éch aléatoire de 10 étudiants ait une note moy sup à 80 est calculée comme suite :

$$\mathbb{P}(\bar{X} > 80) = \mathbb{P}\left[\left(\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})}\right) > \frac{80 - 72}{\left(\frac{9}{\sqrt{10}}\right)}\right] = \mathbb{P}(Z > 2,8) = 0,0026$$

avec : $Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} \leadsto \mathbb{N}(0,1)$

3. Si X ne suit pas une loi normale alors on supposera que $\bar{X}$ suit une loi de Student à n-1 degrés de liberté $\Rightarrow 10 - 1 = 9$.

Donc ce cas : $\mathbb{P}(\bar{X} > 80) = \mathbb{P}(Z > 2,8) = 0,02$.

EX: 7

Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre des électeurs qui votent pour le candidat $\underline{\underline{A}}$. Si on choisi un échantillon de taille $\underline{\underline{n}}$ des électeurs, on définit la variable $f = \frac{X}{n}$ qui désigne la fréquence observée des électeurs qui votent pour le candidat $\underline{\underline{A}}$.

Puisque $n > 30$; $f \rightsquigarrow \mathbb{N}\left(E(f) ; \sigma_{(f)}\right)$. Avec :

$$E(f) = p = 0{,}53 \text{ et } \sigma_{(f)} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0{,}53).(0{,}47)}{1000}}$$

$$= 0{,}015$$

La Probabilité de prévoir à tort d'échec du candidat A, est calculée comme suit :

$$\mathbb{P}(f < 0{,}5) = \mathbb{P}\left(\frac{f - E(f)}{\sigma(f)} < \frac{0{,}5 - 0{,}53}{0{,}015}\right)$$

$$= \mathbb{P}(T < -2)$$

$$= F_T(-2)$$

$$= 1 - F_T(2)$$

$$= 1 - 0{,}9772$$

$$= 0{,}0228.$$

Ex : 8

Soit la v.a X qui désigne la taille des étudiants.
pour un échantillon de 10 étudiants on sait que :

$$E(\bar{X}) = m = 1,70$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2(X)}{n} = \frac{0,8^2}{10} = 0,064 \Rightarrow \sigma(\bar{x}) = 0,25$$

la Prob pour que la moyenne de l'échantillon s'écart de 6 cm de la moyenne de la population m est calculée comme suit : $\mathbb{P}(|\bar{X} - E(\bar{X})| < 0,06) = ?$

$$\mathbb{P}\left(E(\bar{x}) - 0,06 \leq \bar{X} \leq E(\bar{x}) + 0,06\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(m - 0,06 \leq \bar{x} \leq m + 0,06\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(1,7 - 0,06 \leq \bar{x} \leq 1,7 + 0,06) \Rightarrow \mathbb{P}(1,64 \leq \bar{x} \leq 1,76)$$

puisque $X \rightsquigarrow \mathbb{N}(m ; \sigma) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow \mathbb{N}(E(\bar{x}) ; \sigma(\bar{x}))$

donc $T = \dfrac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(\bar{x})} \rightsquigarrow \mathbb{N}(0 ; 1)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(1,64 \leq \bar{x} \leq 1,76) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{1,64 - m}{\sigma(\bar{x})} \leq \frac{\bar{X} - m}{\sigma(\bar{x})} \leq \frac{1,76 - m}{\sigma(\bar{x})}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{1,64 - 1,7}{0,25} \leq T \leq \frac{1,76 - 1,7}{0,25}\right) = \mathbb{P}(-0,24 \leq T \leq 0,24) = 0,1896$$

$$\simeq 19\%$$

Donc, on à 19 chance sur 100, Pour que la moy de l'échantillon soit comprise entre 1,64 m et 1,76 m.