Université Abdelmalek Essaâdi ,
Faculté .S.J.E.S - Tétouan ,
Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion.
Année universitaire : 2020.- 2021

Travaux Dirigés 1 :
Chapitre 1

Loi Normale:

Exercice 1:
Déterminer les probabilités demandées, dans les lois normales données :
1. Loi de $X \rightarrow N(0;1)$. Calculer $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(-1,12 < X < 0,6)$, $\mathbb{P}(X < -0,88)$, $\mathbb{P}(X > -0,5)$
2. Loi de $X \rightarrow N(50;10)$. Calculer $\mathbb{P}(X < 60)$, $\mathbb{P}(X < 43)$, $\mathbb{P}(45 < X < 55)$
3. Loi de $X \rightarrow N(3;0,45)$. Calculer $\mathbb{P}(X > 4)$, $\mathbb{P}(X < 2,55)$, $\mathbb{P}(3,2 < X < 3,7)$
4. La variable X est distribuée selon la loi N(25 ; 7).
Donner la valeur x_0 telle que : $\mathbb{P}(X > x_0) = 0,0516$

Exercice 2 :
Pour qu'une pièce fabriquée par une machine soit utilisable, sa longueur doit être comprise entre 14,7 et 15,3 cm, sinon elle est rejetée. Sachant que la longueur de cette pièce est une variable normale de paramètres 15 cm et 0,2 cm, quelle proportion de pièces peuvent être rejetées.

Exercice 3 :
Une caisse d'assurance maladie reçoit 120 personnes pour l'obtention de remboursements. On suppose que la somme à rembourser à chaque personne est une variable aléatoire de moyenne 1000 dirhams et d'écart type 600 dirhams. La caisse dispose de 130000 dirhams. Quelle est le risque que cette somme ne soit pas suffisante pour rembourser toutes les personnes ?

Exercice 4 :
Un contrôle au calibre, effectué depuis plusieursmois sur le diamètre des pièces usinées par une machine outil, indique que le pourcentage de pièces « défectueuses » est égal à 8 %.
Un échantillon de 100 pièces de la production est prélevé et le diamètre de ces pièces est vérifié. Soit X la variable aléatoire « nombre de pièces défectueuses » dans un échantillon de 100 pièces.
La variable X suit la loi binomiale B(100 ; 0,08).
Calculer, par exemple, la probabilité d'avoir au moins 10 pièces classées défectueuses dans un échantillon de 100 pièces.

Loi du Khi-deux (χ^2) :

Exercice 5 :
Considérons une variable aléatoire X de loi χ^2 à 10 degrés de liberté. Déterminer **c** tel que:
a)$P(X > c) = 0,10$?
b)$P(X \leq c) = 0,10$?
c)Que vaut $P(X > 2,558)$?

Loi de Student :

Exercice 6 :
Considérons une variable aléatoire X de loi Student à 10 degrés de liberté. Cherche **c** tel que :
a)$P(-c < X \leq c) = 0,10$?
b)$P(X > c) = 0,10$?
c)Que vaut $P(X > 0,5415)$?

Corrigés des exercices
TD$_1$: S_3 # 2020 - 2021

EX1 :

1) • $X \rightsquigarrow N(0;1) \Rightarrow \mathbb{P}(X<1) = 0,8413$

⇒ Lecture de la table de la loi normale centrée réduite.

• $X \rightsquigarrow N(0;1) \Rightarrow \mathbb{P}(X>1) = 1 - \mathbb{P}(X<1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

• $X \rightsquigarrow N(0;1) \Rightarrow \mathbb{P}(-1,12 < X < 0,6) = ?$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(-1,12<X<0,6) = \mathbb{P}(X<0,6) - \mathbb{P}(X<-1,12)$$
$$= \mathbb{P}(X<0,6) - \mathbb{P}(X>1,12)$$
$$= \mathbb{P}(X<0,6) - (1 - \mathbb{P}(X<1,12))$$
$$= \mathbb{P}(X<0,6) + \mathbb{P}(X<1,12) - 1$$
$$= 0,5943$$

• $\mathbb{P}(X<-0,88) = \mathbb{P}(X>0,88) = 1 - \mathbb{P}(X<0,88)$
$$= 1 - 0,8106$$
$$= 0,1894$$

• $\mathbb{P}(X>-0,5) = \mathbb{P}(X<0,5) = 0,6915$

⇒ Lecture de la table de la loi normale centrée réduite.

EX 1:

2) $X \rightsquigarrow N(50;10) \Rightarrow \mathbb{P}(X<60) = \mathbb{P}\left(\frac{X-50}{10} < \frac{60-50}{10}\right)$

$= \mathbb{P}(U<1) = 0,8413$

avec $U \rightsquigarrow N(0,1)$.

• $X \rightsquigarrow N(50;10) \Rightarrow \mathbb{P}(X<43) = \mathbb{P}\left(\frac{X-50}{10} < \frac{43-50}{10}\right)$

$= \mathbb{P}(U<-0,7)$

$= 1 - \mathbb{P}(U<0,7)$

$= 0,2420$.

$U \rightsquigarrow N(0,1)$

• $\mathbb{P}(45<X<55) = \mathbb{P}\left(\frac{45-50}{10} < \frac{X-50}{10} < \frac{55-50}{10}\right)$

$= \mathbb{P}(-0,5 < U < 0,5)$

$U \rightsquigarrow N(0,1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(-0,5<U<0,5) = \mathbb{P}(U<0,5) - \mathbb{P}(U<-0,5)$

$= \mathbb{P}(U<0,5) - (1-\mathbb{P}(U<0,5))$

$= 2\mathbb{P}(U<0,5) - 1$

$= 0,3830$.

EX 1 :

3) $\bullet\ X \rightsquigarrow N(3;0{,}45) \Rightarrow \mathbb{P}(X>4) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{0{,}45} > \frac{4-3}{0{,}45}\right)$

$= \mathbb{P}(U > 2{,}22)$

$= 1 - \mathbb{P}(U < 2{,}22)$

$= 0{,}0132.$

$U \rightsquigarrow N(0,1).$

$\bullet\ X \rightsquigarrow N(3;0{,}45) \Rightarrow \mathbb{P}(X < 2{,}55) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{0{,}45} < \frac{2{,}55-3}{0{,}45}\right)$

$= \mathbb{P}(U < -1)$

$= 1 - \mathbb{P}(U < 1)$

$= 0{,}1587.$

$\bullet\ X \rightsquigarrow N(3;0{,}45) \Rightarrow \mathbb{P}(3{,}2 < X < 3{,}7) = \mathbb{P}\left(\frac{3{,}2-3}{0{,}45} < \frac{X-3}{0{,}45} < \frac{3{,}7-3}{0{,}45}\right)$

$= \mathbb{P}(0{,}44 < U < 1{,}56)$

$= \mathbb{P}(U < 1{,}56) - \mathbb{P}(U < 0{,}44)$

$= 0{,}9406 - 0{,}6700$

$= 0{,}2706.$

$U \rightsquigarrow N(0,1).$

EX 1 :

4/ a/ $X \sim \mathbb{N}(25 ; 7)$; $U \sim \mathbb{N}(0,1)$

Donner la valeur $\underline{\underline{x_0}}$ telle que $\mathbb{P}(X > x_0) = 0,0516$

• $\mathbb{P}(U > u_0) = 0,0516 \Leftrightarrow \mathbb{P}(U < u_0) = 0,9484$

$\Leftrightarrow u_0 = 1,63$

$\frac{x_0 - 25}{7} = 1,63 \Leftrightarrow x_0 = 25 + 1,63 \times 7 = 36,41$

b) Si $U \sim \mathbb{N}(0,1)$

Donner la valeur u_0 telle que :

• $\mathbb{P}(U < u_0) = 0,8944$? $\Rightarrow u_0 = 1,25$ (table)

• $\mathbb{P}(-u_0 < U < u_0) = 0,98$? avec $U \sim \mathbb{N}(0,1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(-u_0 < U < u_0) = 0,98 \Leftrightarrow 2\,\mathbb{P}(U < u_0) - 1 = 0,98$

$\Rightarrow \mathbb{P}(U < u_0) = 0,99$

$\Rightarrow \underline{u_0 = 2,33}$

d'après la table de la loi $N(0,1)$.

EX8 :

Si on désigne par la variable la longueur des pièces, X suit une loi normale :

$$X = N(15 ; 0,2)$$

La probabilité de rejet d'une pièce est :

$$P(\text{rejet}) = 1 - P(\text{accepter}).$$

$$P(\text{accepter}) = P(14,3 \leqslant X \leqslant 15,3) = P(X \leqslant 15,3) - P(X \leqslant 14,7)$$

$$P(\text{accepter}) = P\left(\frac{X-15}{0,2} \leqslant \frac{15,3-15}{0,2}\right) - P\left(\frac{X-15}{0,2} \leqslant \frac{14,7-15}{0,2}\right)$$

$$P(\text{accepter}) = P(Z \leqslant 1,50) - P(Z \leqslant -1,50)$$

$$P(\text{accepter}) = P(Z \leqslant 1,50) - (1 - P(Z \leqslant 1,50))$$

$$= 2P(Z \leqslant 1,50) - 1.$$

$$P(\text{accepter}) = 2 \times 0,93319 - 1 = 0,86638.$$

Chaque pièce a une probabilité de 0,13362 d'être rejetée ou il y a un risque de rejet de 13 % des pièces fabriqués.

Ex:3

- Désignons par X_i ($i=1$ à 120) la somme à rembourser à chaque personne.
- Désignons par X la somme totale que la caisse doit payer aux personnes :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{120} = \sum_{i=1}^{120} X_i$$

→ D'après le théorème central limite (T.C.L), on peut affirmer que X suite une loi normale de moyenne la somme des moyennes et l'écart-type la racine-carrée de la somme des variance.

$$X \sim N\left(120 \times 1000 ; \sqrt{120 \times 600^2}\right) = N\left(12000 ; 6572,67\right)$$

La somme de 130000 DH ne sera pas suffisants si la somme total à rembourse aux 120 personnes dépasse : 130000 DH.

$$\mathbb{P}(X > 130000) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 130000)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - 12000}{6572,67} \leq \frac{130000 - 12000}{6572,67}\right)$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(X > 130000) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1,52) = 1 - 0,93574 = 0,0643$$

→ Il y a donc un risque de 6,5% que la somme de 130000 DH ne soit pas suffisants pour rembourser touts les personnes.

EX : 4

Soit X la v.a = nombre de pièces défectueuses dans un échantillon de 100 pièces

$\rightarrow X \rightsquigarrow B(100 ; 0,08)$ loi binomiale $\begin{cases} n = 100 \\ p = 8\% \end{cases}$

Comme ; $np = 100 \times 0,08 = 8 > 5$; et

$$n(1-p) = 100 \times 0,92 = 92 > 5 ;$$

on peut utilise l'approximation par la loi normale $\mathbb{N}(8 ; 2,713)$. les paramètres sont en effet :

la moyenne $m = np = 8$ la la variance est égale à : $\sigma^2 = np(1-p) = 7,38 = (2,713)^2$.

En utilisant cette approximation, on peut calculer par exemple, la probabilité d'avoir au moins 10 pièces classées défectueuses dans un échantillon de 100 pièces, soit : $\mathbb{P}(X \geq 10)$ puis devient avec la correction de continuité $\mathbb{P}(X > 9,5)$:

$$\mathbb{P}(X > 9,5) = \mathbb{P}\left(\frac{X-8}{2,713} > \frac{9,5-8}{2,713}\right)$$

$$= \mathbb{P}(Y > 0,552)$$

$$= 0,2903$$

! Avec : $Y \rightsquigarrow \mathbb{N}(0,1)$

Ex : 5

Soit $X \rightsquigarrow \chi^2(10) \Rightarrow$ la table donne les valeurs de : $\mathbb{P}(X > c)$.

a) on cherche $\underline{c}$ tel que : $\mathbb{P}(X > c) = 0,10$

on se place à l'intersection de la ligne degré de liberté $n = 10$ et $p = 0,10$ et on obtient : c

$c = 15,987$

b) $\mathbb{P}(X \leq c) = 0,10$? la table donne la Prob de $\mathbb{P}(X > c)$ et non $\mathbb{P}(X \leq c) \Rightarrow$

Il suffit donc d'écrire $\mathbb{P}(X \leq c) = 1 - \mathbb{P}(X > c)$ et on trouve c tel que $\mathbb{P}(X > c) = 0,9$

c'est $c = 4,865$

c) $\mathbb{P}(X > 2,558) = ?$ Il faut trouver $c = 2,558$ à l'intérieur du tableau sur la ligne $n = 10$ et on obtient

$\mathbb{P}(X > 2,558) = 0,99$.

EX : 6 $X \rightsquigarrow St_{(10)}$

la table donne les valeurs de $P(|X| \geq t)$

on cherche $P(X \leq t)$?

a). $P(-t < X \leq t) = 0{,}10$?

on se place à l'intersection de la ligne degré de liberté $n = 10$ et $P = P(|X| \geq t) = 0{,}90$ et on obtient : $t = 0{,}1289$

b). $P(X > t) = 0{,}10$?

on ne peut pas lire directement dans la table, mais du fait de la symétrie de la densité, on peut écrire

$$P(|X| \geq t) = 2P(X > t) = 0{,}20 \text{ et ainsi,}$$

on cherche t tel que $P = 0{,}20$ càd $t = 1{,}3722$.

c). $P(X > 0{,}54415)$?

A l'intérieur de la table, à la ligne degré de liberte $n = 10$, on voit que $P(|X| \geq 0{,}5415) = 0{,}60$,

on en déduit que :

$$P(X > 0{,}5415) = \frac{1}{2}\left(P(|X| \geq 0{,}5415)\right)$$

$$= 0{,}3.$$