

Analyse Mathématique**Série de travaux dirigés n° 1**

1. Calculer les limites suivantes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 2) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{x-2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^3}{x^3} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-3x}) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^2-9}{x} \end{array}$$

2. Calculer les limites suivantes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - 2 \right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2-2}{15x^2-3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+xe^{-x}}{6x^2+2}$$

3. Calculer les limites suivantes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3-\frac{1}{x^2}}{2x+5+\frac{1}{x^2}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^4+2)|x|}{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{\sqrt{(2x-1)^2}}{x-\frac{1}{2}}$$

4. Calculer les limites suivantes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x-1} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x-1}{x-1}$$

5. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 4x^2 + x + 2}{2x^3 + 3x + 1} \quad \lim_2 \frac{2x - 5}{x - 2} \quad \lim_4 \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{3x + 3} - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 10}{5x^3 + 3x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{3x + 5} \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{x^2 + 6x + 1} - x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x - 2} - \sqrt[3]{x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Analyse Mathématique

Série de travaux dirigés n° 2

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

2. $f(x) = \ln(x^2 + x - 3)$

3. $f(x) = \sqrt{x} e^{\sin x}$

4. $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^3}$

5. $f(x) = (x^2 + 1)^{2/15}$

6. $f(x) = \frac{e^x + 2}{(1 - 3e^x)}$

7. $f(x) = \frac{1 - (\ln x)^2}{1 + (\ln x)^2}$

8. $f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)^{4x-2}$

9. $f(x) = (\sqrt{7})^{\frac{1}{x}}$

10. $f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln x}$

11. $f(x) = \cos(\sqrt{\sin x + 5})$

12. $f(x) = \tan(e^x)$

Exercice 2

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4

2. $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4

Exercice 3

1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$

2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

Exercice 4

Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ en 0.

En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.

Exercice 5

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Analyse Mathématique

Série de travaux dirigés n° 3

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{y}{x^3 + y^3}$

Montrer que f est une fonction homogène dont vous préciserez le degré.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = 5x^2y - xy^2$

Montrer que f est une fonction homogène dont vous préciserez le degré.

Exercice 3

Optimiser la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par:

$f(x, y) = xy$ sous la contrainte $3x + 5y = 8$

Exercice 4

En utilisant la méthode de substitution, étudier l'extrémum de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^2 - 2xy \quad \text{sous la contrainte : } x + y = 1$$

(On montrera que la fonction f possède un point critique et on déterminera sa nature)

Exercice 5

Optimiser la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x + y + 5 \quad \text{sous la contrainte : } x^2 + y^2 = 1$$

Analyse Mathématique

Série de travaux dirigés n° 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$2. \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$3. \int_1^e x \ln(x) dx$$

$$4. \int_1^e x^2 \ln(x) dx$$

$$5. \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$$

Calculer les primitives suivantes :

$$1. \int \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} dx$$

$$2. \int x^2 e^{-x} dx$$

$$3. \int \tan x dx$$