

Exercice 1. QUESTIONS DE COURS

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduisez à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- (a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
- (b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 2.

Le but de cette question est de déterminer le t é r e des énoncés. On considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n + c_n$. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite $f \in \mathbb{R}$. On fixe un réel $E > 0$.

- (a) Traduisez à l'aide de quantificateurs la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f . En déduire qu'il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont compris par $f - E$.
- (b) On se propose de montrer qu'il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont compris par $f + E$.
- (c) En déduire qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $]f - E, f + E[$.
- (d) Conclusion.