Université Abdelmalek Essaâdi,
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales de Tétouan
Année universitaire 2019-2020.
Centre d'Examen -Alhoceima.

Matière	Echantillonnage et Estimation	Code d'Examen	D
Groupe	A et B	Cocher comme ça	•
Professeur	Dakkon Mohamed	Pas comme ça	⊗ ⊘ ⊖

∗ Une seule réponse est correcte pour chacune des questions

Exercice 1 :(4 points)
Supposons qu'une population est constituée des unités statistiques dont le caractère mesurable de chacun est:

$$x_1 = 2;\quad x_2 = 4;\quad x_3 = 6;\quad x_4 = 8;\quad x_5 = 10.$$

Q1:La moyenne de la population est: A 6 B 8 C 10
Q2:La variance est: A 8 B 10 C 12
On veut prélever de cette population des échantillons de taille $n = 2$ en effectuant un tirage sans remise:
Q3:Les paramétres de la distribution d'échantillonage de $\bar{X}$ est:
A $E(\bar{X}) = 6$; $\sigma^2(\bar{X}) = 3$
B $E(\bar{X}) = 6$; $\sigma^2(\bar{X}) = 6$
C $E(\bar{X}) = 6$; $\sigma^2(\bar{X}) = 9$
Q4:Laquelle des deux relations peut-on vérifier?: A $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ B $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$
Q5:Le taux de sondage est: A $0,4$ B $0,8$
Exercice 2 :(6 points)
La consommation d'essence en $(L/100km)$ d'un certain modèle d'automobile est distribuée selon une loi normale. On note la consommation de 25 voitures de ce modèle. On obtient une moyenne d'échantillon de $8,7L/100km$ et un écart-type corrigé d'échantillon de $0,09L/100km$. On demande: d'Estimer la variance de la population par intervalle avec 90%.
Q6:la taille d'échantillon: A 25 B 8,7 C 0,09
Q7:La moyenne d'échantillon: A 8,7 B 0,09 C 25
Q8:L'écart-type corrigé d'échantillon: A 0,09 B 100 C 8,7
Q9:Le nivaux de confiance est: A $1-\alpha = 0,9 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$ B $\alpha = 0,9 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$ C $1-\alpha = 0,9 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
Q10:La statistique $Z = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\sigma^2}$ suivant la loi : A $\chi^2(25)$ B $\chi^2(24)$ C $N(0,1)$
Q11:A l'aide de la table de la loi d'un $\chi^2(24)$, on détermine:
A $x_1 = 13,58$ et $x_2 = 36,42$ tel que :$P(Z \geq x_2) = 0,05$ et $P(Z \leq x_1) = 0,05$
B $x_1 = 13,84$ et $x_2 = 36,41$ tel que :$P(Z \leq x_2) = 0,05$ et $P(Z \leq x_1) = 0,05$
C $x_1 = 13,84$ et $x_2 = 36,41$ tel que :$P(Z \leq x_2) = 0,05$ et $P(Z \leq x_1) = 0,05$
Q12:L'intervale de confiance pour la variance est:
A $I_c(\sigma^2) = [\frac{(n-1)S^2}{x_2}, \frac{(n-1)S^2}{x_1}]$
B $I_c(\sigma^2) = [\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{x_2}, \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{x_1}]$
C $I_c(\sigma^2) = [\frac{(n)\widehat{S}^2}{x_2}, \frac{(n)\widehat{S}^2}{x_1}]$
Q13:Donc L'intervale de confiance pour la variance avec proba 0,9 est:
A $I_c(\sigma^2) = [\frac{(24)(0,09)^2}{36,42}, \frac{(24)(0,09)^2}{13,85}]$
B $I_c(\sigma^2) = [\frac{(24)(0,1)^2}{36,42}, \frac{(24)(0,1)^2}{13,85}]$
C $I_c(\sigma^2) = [\frac{(25)(0,09)^2}{36,42}, \frac{(25)(0,09)^2}{13,85}]$
Q14:Donc L'intervale de confiance pour l'écart-type avec proba 0,9 est:
A $\sigma \in [0,0053; 0,012]$ avec proba 0,90
B $\sigma \in [0,927; 1,505]$ avec proba 0,1
C $\sigma \in [0,927; 1,505]$ avec proba 0,90

Exercice 3 :(10 points)

On veut estimer la moyenne m d'une variable aléatoire X suivant une loi normale, à l'aide d'un échantillon de taille n=100. La moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon observée est 4,3. Comment construire un tel intervalle, si l'on ne connait pas la variance de X, mais seulement la variance empirique de l'échantillon S^2 égale à 6,76.

Q15:La taille de l'échantillon est: $\boxed{\text{A}}$ 4,3 $\boxed{\text{B}}$ 100 $\boxed{\text{C}}$ 6,76 $\boxed{\text{D}}$ 10

Q16:La moyenne observée sur l'échantillon est: $\boxed{\text{A}}$ 4,3 $\boxed{\text{B}}$ 6,76 $\boxed{\text{C}}$ 100 $\boxed{\text{D}}$ 10

Q17:La variance empirique de l'échantillon est: $\boxed{\text{A}}$ 100 $\boxed{\text{B}}$ 6,76 $\boxed{\text{C}}$ 10 $\boxed{\text{D}}$ 4,3

Q18:Le nivaux de confiance est: $\boxed{\text{A}}$ $\alpha = 95\%$ $\boxed{\text{B}}$ $1 - \alpha = 95\%$ $\boxed{\text{C}}$ $1 + \alpha = 95\%$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 5\%$

Q19:L'intervalle de confiance de m au seuile de $1 - \alpha$ est formulé comme:

$\boxed{\text{A}}$ $P(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma(\overline{x}) \leq m \leq \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma(\overline{x})) = \alpha$

$\boxed{\text{B}}$ $P(x - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma(x) \leq m \leq x - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma(x)) = 1 - \alpha$

$\boxed{\text{C}}$ $P(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma(\overline{x}) \leq m \leq \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sigma(\overline{x})) = 1 - \alpha$

Q20:D'après l'énoncé de l'exercice le tirage est : $\boxed{\text{A}}$ sans remise $\boxed{\text{B}}$ avec remise

Q21:D'après la Q20, L'intervalle de confiance est reformulée comme:

$\boxed{\text{A}}$ $P(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \alpha$

$\boxed{\text{B}}$ $P(x - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq x + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

$\boxed{\text{C}}$ $P(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Q22:L'écart-typr de la population est: $\boxed{\text{A}}$ inconnue $\boxed{\text{B}}$ connue

Q23:L'estimateur sans biais de l'écart-typr de la population sous le mode de tirage est:

$\boxed{\text{A}}$ $S' = \sqrt{S^2.\frac{n}{n-1}} \quad \Rightarrow S' = 2,61$

$\boxed{\text{B}}$ $S'' = \sqrt{S^2.\frac{n-1}{n}} \quad \Rightarrow S'' = 1,90$

Q24:D'après la Q23, L'intervalle de confiance est reformulée comme:

$\boxed{\text{A}}$ $P(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \alpha$

$\boxed{\text{B}}$ $P(x - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S''}{\sqrt{n}} \leq m \leq x + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S''}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

$\boxed{\text{C}}$ $P(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S'}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{S'}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Q25:La loi de la variable aléatoire X définie au niveau de la population est: $\boxed{\text{A}}$ inconnue $\boxed{\text{B}}$ connue

Q26:L'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi:

$\boxed{\text{A}}$ normale de paramètre $E(x)$ et $\sigma(x)$.En effet $\overline{x} \sim N(E(x); \sigma(x))$

$\boxed{\text{B}}$ normale de paramètre $E(\overline{x})$ et $\sigma(\overline{x})$.En effet $\overline{x} \sim N(E(\overline{x}); \sigma(\overline{x}))$

$\boxed{\text{C}}$ normale de paramètre $E(x)$ et $\sigma(\overline{x})$.En effet $\overline{x} \sim N(E(x); \sigma(\overline{x}))$

Q27:D'après la Q26 : $\boxed{\text{A}}$ $(\frac{x-E(x)}{\sigma(x)}) \sim N(0;1)$ $\boxed{\text{B}}$ $(\frac{overlinex-E(\overline{x})}{\sigma(\overline{x})}) \sim N(0;1)$ $\boxed{\text{C}}$ $(\frac{\overline{x}-E(\overline{x})}{\sigma(\overline{x})}) \sim Student(n-1)$

Q28:La valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la : $\boxed{\text{A}}$ loi normale $\boxed{\text{B}}$ loi Student $\boxed{\text{C}}$ loi $\chi^2(n)$

Q29:Donc la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est: $\boxed{\text{A}}$ 1,96 $\boxed{\text{B}}$ 2,58 $\boxed{\text{C}}$ 1,64 $\boxed{\text{D}}$ 2,776

Q30:Si on remplace $\bar{x}$, $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$,S' ou S", n par leurs valeurs, L'intervalle de confiance de la moyenne m de la population au seuil de 95% est donné comme:

$\boxed{\text{A}}$ $P(3,78 \leq m \leq 4,81) = 0,95$

$\boxed{\text{B}}$ $P(12,45 \leq m \leq 13,56) = 0,05$

$\boxed{\text{C}}$ $P(1,76 \leq m \leq 2,46) = 0,95$

Q31:Interpréter:

$\boxed{\text{A}}$ On a 95 chances sur 100 pour que la moyanne m de la population soit compris entre 3,78 et 4,81

$\boxed{\text{B}}$ On a 5 chances sur 100 pour que la moyanne m de la population soit compris entre 12,45 et 13,56

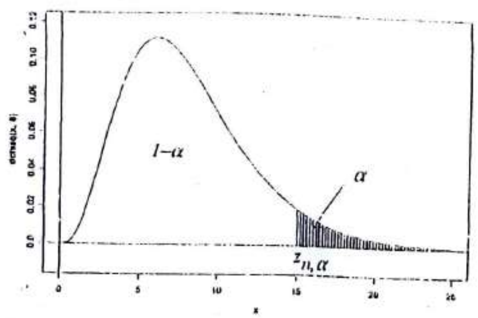
$\boxed{\text{C}}$ On a 95 chances sur 100 pour que la moyanne m de la population soit compris entre 1,76 et 2,46

≪ Bon courage ≫

TABLE DE LA LOI DU χ^2

X étant une variable aléatoire de loi du χ^2 à n degrés de liberté, et α un réel de $[0,1]$,
la table donne la valeur $z_{n,\alpha} = F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)$, telle que $P(X > z_{n,\alpha}) = \alpha$.

En R, la commande correspondante est `qchisq(1-alpha,n)`.



n \ α	0.995	0.990	0.975	0.95	0.9	0.8	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	0.00004	0.0002	0.001	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.80
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.19	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	13.53	16.34	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	15.35	18.34	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	17.18	20.34	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	18.10	21.34	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	19.02	22.34	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.94	23.34	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	20.87	24.34	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	21.79	25.34	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	22.72	26.34	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	23.65	27.34	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	24.58	28.34	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	25.51	29.34	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70

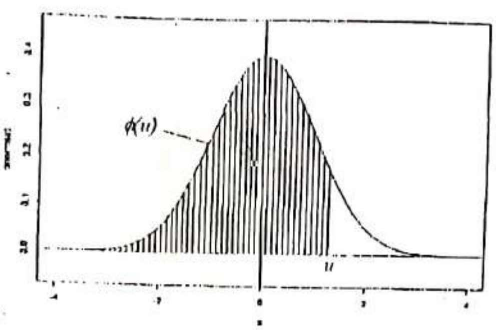
Pour $n > 30$, on admet que : $z_{n,\alpha} = \frac{1}{2}\left(u_{2\alpha} + \sqrt{2n-1}\right)^2$ si $\alpha < \frac{1}{2}$

$$z_{n,\alpha} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n-1} - u_{2(1-\alpha)}\right)^2 \text{ si } \alpha \geq \frac{1}{2}$$

TABLE I DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

U étant une variable aléatoire de loi $N(0,1)$, la table donne la valeur de $\Phi(u) = P(U \leq u)$.

En R, la commande correspondante est pnorm(u).



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Grandes valeurs de u

u	3.0	3.5	4.0	4.5
$\Phi(u)$	0.9987	0.99977	0.999968	0.999997