

Recherche Operationnel : Cours WLD ①

Chapitre 1 « Programmation linéaire »

Partie 1

(Méthode graphique) (2 cas, Problème

Exemples

de Maximisation et Minimisation)

1^{er} cas Problème de Max

⇒ Usine fabrique Deux produits P_1 et P_2 besoin des Ressources : d'équipement et la Main d'œuvre et le Matière Première ; disponible et en Quantité limitée :

	P_1	P_2	disponibilité
① équipement	3	9	81
② MOD	4	5	55
③ Main	2	1	20

✓ Prix de vent P_1 6 Euros ✓
✓ Prix de vent P_2 4 Euros ✓

Question : Quelles Quantités de Produits P_1 et P_2 doit Produire l'Usine pour Maximiser le bénéfice Total ?

Solution :

① * $X_1; X_2 \Rightarrow$ Quantité de Produits P_1 et P_2
② * Se sont des variables de décisions s'appelle aussi intrinsèque et les inconnues.

③ * fonction objectif : Max de Z : $6X_1 + 4X_2$

* 3 différentes Contraintes :

$$① \quad 3X_1 + 9X_2 \leq 81$$

$$② \quad 4X_1 + 5X_2 \leq 55$$

$$③ \quad 2X_1 + X_2 \leq 20$$

donc la Programmation linéaire sous la forme de la forme Canonique

en Utilise dans la Résolution

graphique.

$$\text{Max } Z: 6X_1 + 4X_2$$

$$3X_1 + 9X_2 \leq 81$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 55$$

$$2X_1 + X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ (3 Contraintes Toujours Positive)}$$

Résolution graphique.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &= 81 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 55 \\ 2x_1 + x_2 &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &\rightarrow 6x_1 + 4x_2 = P \\ 4x_2 &= P - 6x_1 \end{aligned}$$

l'équation réduite: $x_2 = \frac{P}{4} - \frac{6}{4}x_1$

① Coeff Directeur $(1, -\frac{6}{4})$
ou $(-1, \frac{6}{4})$

$m = (-\frac{6}{4}) \leftarrow m$ fonction objective

Vecteur Normée $(6, 4)$ (a, b)

Vecteur orienté $(-4, 6)$ $(-b, a)$

$$3x_1 + 9x_2 = 81$$

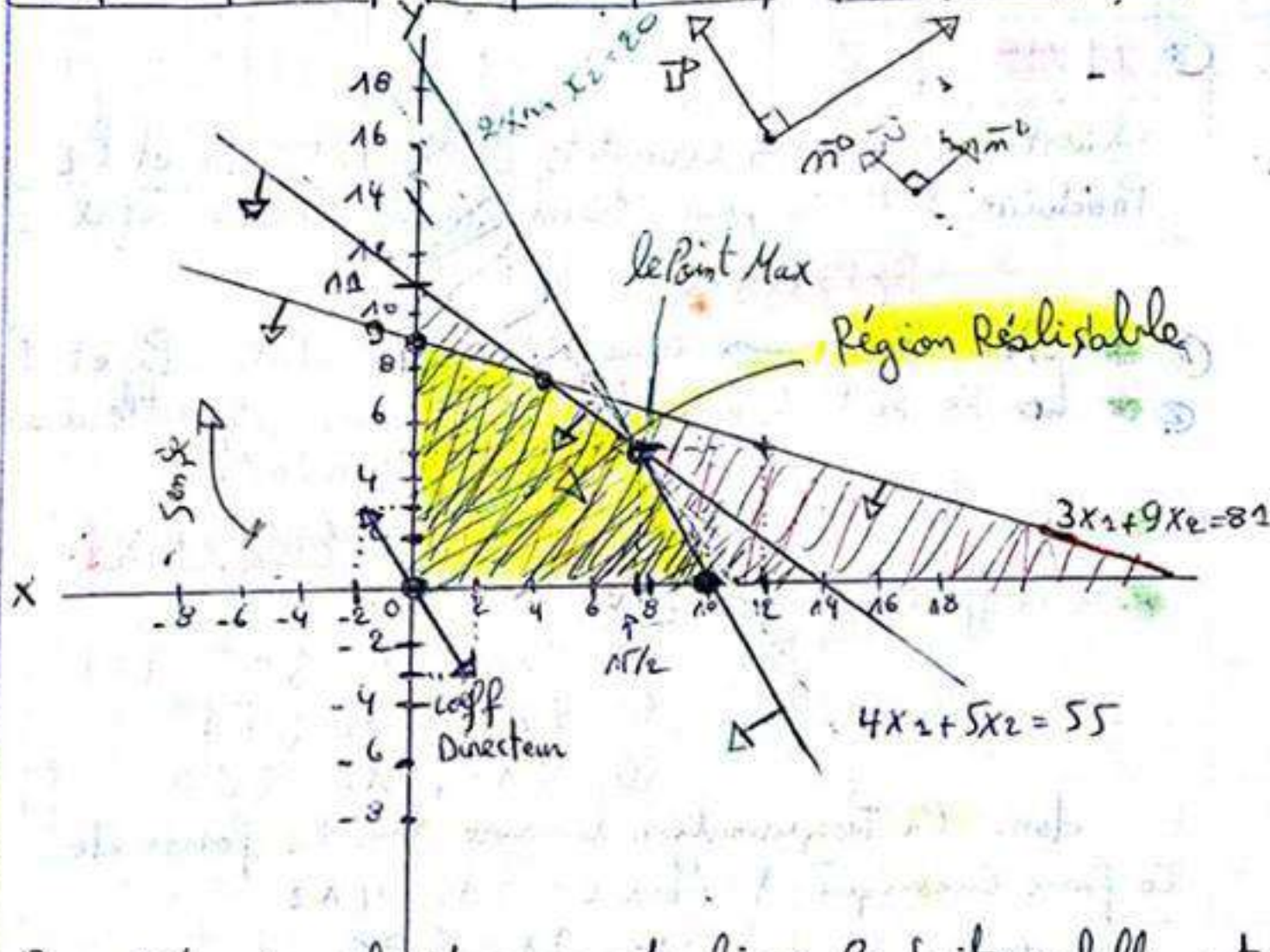
$$4x_1 + 5x_2 = 55$$

$$2x_1 + x_2 = 20$$

x_2	0	12
x_1	9	5

x_2	11/2	0
x_1	5	11

x_1	10	11/2
x_2	0	5



Pour déterminer le Max on peut glisser la droite parallèlement jusqu'à rencontrer la région réalisable d'où le Max de Z sur le point $(\frac{15}{2}; 5)$

Max de Z: $6 \times \frac{15}{2} + 4 \times 5 = 65 \text{ Euros.}$

2^{ème} Cas Problème de Minimisation:

Exercice $\leq$ TD 1

	Produit X	Produit Y	Besoin
A	2	1	14
B	1	1	12
C	1	3	18
Coût	20	40	
Valeur Max	14	16	

Modéliser le Problème sous forme ab (PL) soient X et Y Quantités de Produits X et Y achetés (les Δble de décision "inconnus")

PL
forme Canonique
Utilisée dans la Résolution Graphique

$$\text{Min } Z = 20X + 40Y$$

$$2X + Y \geq 14$$

$$X + Y \geq 12$$

$$X + 3Y \geq 18$$

$$X \leq 14$$

$$Y \leq 16$$

$$X, Y \geq 0$$

→ fonction objective $20X + 40Y = P$

$$\vec{m}(20, 40)$$

→ equation Réduite

$$Y = -\frac{1}{2}X + \frac{P}{20}$$

$$\vec{P}(-40, 20)$$

→ coefficient directeur $(1, -\frac{1}{2})$ ou $(-1, \frac{1}{2})$

X	5	6
Y	4	2

X	9	6
Y	3	6

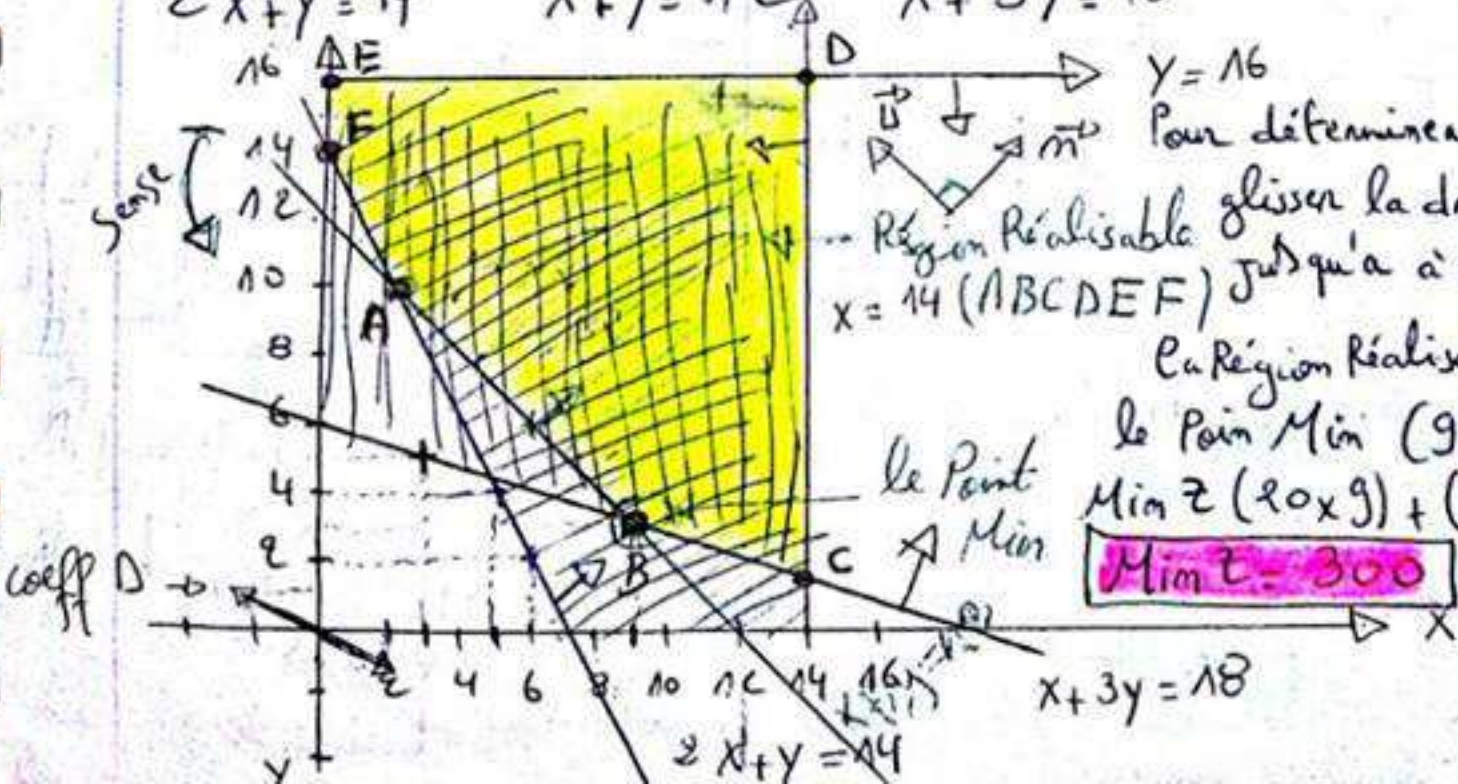
X	9	3
Y	3	5

$$X = 14 \text{ et } Y = 16$$

$$2X + Y = 14$$

$$X + Y = 12$$

$$X + 3Y = 18$$



Pour déterminer le Min on peut

glisser la droite parallèlement à la Région Réalisable jusqu'à sa rencontre

la Région Réalisable d'où

le Point Min (9, 3)

$$\text{Min } Z = (20 \times 9) + (40 \times 3)$$

$$\text{Min } Z = 300$$

Partie 2 Forme Canonique $\rightarrow$ Forme Standard

(4)

Exemple

$$\begin{cases} \text{Max } z = 20x_1 + 30x_2 & \text{Utilisation de variables d'écart} \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\ll (x_1, x_2) \text{ Dbls de décision} \gg \\ &\ll (x_3, x_4, x_5) \text{ Dbls d'écart} \gg \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{Max } z(x_1, \dots, x_5) = 20x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Ecriture Matricielle:

Contraintes $\rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \in M_{3 \times 5} \mathbb{R}$$

$$b = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$b \in \mathbb{R}^3$$

$$C = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C \in \mathbb{R}^5$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^5$$

fonction objective

C^T Transposé

$$\begin{cases} \text{Max } z' = C^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

En général

Forme Canonique:

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &A \in M_{m \times n} \mathbb{R} \\ &b \in \mathbb{R}^m \\ &x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Forme Standard

en Utilisant des Dbls d'écart, puisque

$$\sum a_{ij}x_j + e_i = b_i$$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A identité

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\tilde{A} = [A, I_m] \in M_{m \times (n+m)} \mathbb{R}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{d'où } \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$