

Recherche opérationnelle
Les démonstrations et les exemples seront traités en cours

Souad EL Bernoussi

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation Rabat

[http ://www.fsr.ac.ma/ANO/](http://www.fsr.ac.ma/ANO/)

Table des matières

1	Programmation linéaire	2
1.1	Exemple.	2
1.2	Forme générale d'un programme linéaire.	3
1.3	Formes matricielles classiques et convensions.	3
1.4	Interprétation économique.	4
2	Résolution graphique.	5
3	Principes de la résolution algébrique.	5
3.1	Bases , solutions de bases et solutions réalisables.	5
3.2	Caractérisation algébrique des points extrêmes.	8
3.3	Propriétés fondamentales de la programmation linéaire.	9
3.4	Opération de pivotage.	10
3.5	Algorithme du simplexe à la main.	10
4	Algorithme du simplexe .	11
4.1	Exemple.	12
4.2	Algorithme du simplexe.	13
4.3	Complexité de l'algorithme et efficacité pratique.	15

4.4	Initialisation de l'algorithme du simplexe.	16
4.4.1	La méthode du grand M.	17
5	la notion de dualité.	17
5.1	Théorèmes de dualité.	17
5.2	Interprétation économique de la dualité.	20
6	Exercices	22

1 Programmation linéaire

La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte.

On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans IR^+ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans IN . Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels.

Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en nombre réels est la méthode du Simplex. En théorie, elle a une complexité non polynomiale et est donc supposée peu efficace. Cependant, en pratique, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode.

Un programme linéaire est la maximisation ou la minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

1.1 Exemple.

Voici un petit exemple traitable par la programmation linéaire. Une usine produit deux ciments, rapportant 500Dh et 700Dh par tonne.

Une tonne du ciment N°1 nécessite 40 min de calcination dans un four à chaux et 20 min de broyage.

Une tonne du ciment N°2 nécessite 30 min de calcination dans un four à chaux et 30 min de broyage.

Le four et l'atelier de broyage sont disponibles 6h et 8h par jour.
Combien de ciment de chaque type peut-on produire par jour pour maximiser le bénéfice ?

Ce problème se modélise comme suit :

$$\begin{cases} \text{Max } z = 500x_1 + 700x_2 & (1) \\ 40x_1 + 30x_2 \leq 360 & (2) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 480 & (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

(1) : est le profit total qui est à optimiser appelé fonction objective.

(2) et (3) sont des contraintes. (2) est la disponibilité du four et

(3) est la disponibilité du broyeur.

(4) est le domaine des variables.

1.2 Forme générale d'un programme linéaire.

$$\begin{cases} (1) \quad \max \text{ ou } \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ (2) \quad \forall i = 1, \dots, m : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq, = \text{ ou } \geq b_i \\ (3) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad x_j \geq 0 \end{cases}$$

(1) : fonction objective.

(2) : m contraintes linéaires.

(3) : contraintes de positivité.

1.3 Formes matricielles classiques et convensions.

Notons par $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ le vecteur des variables. $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ le second membre des contraintes, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ le vecteur coût ou profit associé aux variables et A la matrice $m \times n$ des a_{ij} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Forme canonique :} \\ \max \quad z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Forme standard :} \\ \max \quad z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

La forme canonique avec des contraintes $\leq$ s'utilise dans la représentation graphique, et la forme standard avec des contraintes égalité s'utilise dans la résolution algébrique.

Remarque : 1. *Ces formes ne servent qu'à simplifier les représentations théoriques.*

Dans la réalité un problème linéaire peut comporter des contraintes égalités ou inégalités.

Ainsi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i \end{array} \right. \text{ et}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \underbrace{e_i}_{\text{variable d'écart}} = b_i$$

$$\max z = -\min -z \quad x \in \mathbb{R}, \quad x = x^+ - x^- \quad \text{avec } x^+ \text{ et } x^- \in \mathbb{R}^+.$$

1.4 Interprétation économique.

Un programme linéaire a une interprétation économique très large :

Un acteur économique qui exerce n activités avec des intensités x_j à déterminer.

Ces activités utilisent m ressources.

La quantité a_{ij} de ressources i nécessaires pour exercer l'activité j avec une intensité 1.

On connaît le profit (en maximisation) et le coût (en minimisation).

c_j correspond à une intensité 1 de l'activité j .

2 Résolution graphique.

On résout graphiquement le problème suivant :

$$\begin{aligned}\max \quad z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

matriciellement on a $m = 2$, $n = 2$, $c = (1, 2)$,
 $x = (x_1, x_2)^T$, $b = (6, 3)^T$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3 Principes de la résolution algébrique.

La résolution algébrique utilise la forme standard, où A est une matrice $m \times n$ de rang m .

$$(P) \quad \begin{cases} \max \quad z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3.1 Bases, solutions de bases et solutions réalisables.

Les bases de A sont les matrices $m \times m$ inversibles extraites de A .

Soit B une base de A .

On partitionne A sous la forme suivante : $A = [B \ N]$ (on suppose pour faciliter la présentation que les colonnes de bases sont les m premières colonnes), on partitionne de même les vecteurs x et c . $x = (x_B, x_N)^T$ et $c = (c_B, c_N)^T$.

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \iff Bx_B + Nx_N &= b \\ \iff x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= cx = c_Bx_B + c_Nx_N \\ &= c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N. \end{aligned}$$

On note $\overline{c}_N = c_N - c_BB^{-1}N$.

Le problème (P) s'écrit alors sous la forme :

$$(P') \quad \begin{cases} \max z = c_BB^{-1}b + \overline{c}_Nx_N \\ x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases}$$

C'est la forme canonique par rapport à la base B .

x^* est dite solution de base si elle vérifie $Ax^* = b$ et $x^* = \begin{pmatrix} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{pmatrix}$.

Si en plus $x_B \geq 0$ alors x^* est une solution de base réalisable.

x^* est dite solution réalisable si elle vérifie les contraintes c'est à dire $Ax^* = b$ et $x^* \geq 0$.

Exemple 1. Déterminer les bases et les bases réalisables du système suivant :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$B_1 = [A^1 \ A^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies x_{B_1} = B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

B_1 est une base réalisable.

$$B_2 = [A^1 \ A^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \det B_2 = 0.$$

B_2 n'est pas une base.

$$B_3 = [A^1 \ A^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies x_{B_3} = B_3^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

B_3 est une base réalisable.

$$B_4 = [A^2 \ A^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies x_{B_4} = B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0. \text{ } B_4 \text{ est une base réalisable.}$$

$$B_5 = [A^2 \ A^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies x_{B_5} = B_5^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \not\geq 0.$$

B_5 n'est pas une base réalisable.

$$B_6 = [A^3 \ A^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies x_{B_6} = B_6^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

B_6 est une base réalisable.

3.2 Caractérisation algébrique des points extrêmes.

Definition 2. Un ensemble X est convexe si : $\forall x, y \in X$ et $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ avec $\alpha + \beta = 1$; on a $\alpha x + \beta y \in X$.

Definition 3. Une combinaison linéaire d'éléments de X ($\sum_1^n \lambda_i x_i$) est dite convexe si $\sum_1^n \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$.

Notons $X = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, l'ensemble des solutions réalisables de (P) . Cet ensemble est convexe.

Definition 4. * L'ensemble X est appelé **un polytope convexe**.

* Un polytope borné est un **polyèdre convexe**.

* Un **point extrême** d'un polytope ou d'un polyèdre convexe X , est un point qui ne peut être exprimé comme combinaison convexe d'autres points de X .

* On appelle support de x , l'ensemble des indices des composantes non nulles. On le note $\text{sup } p(x)$.

Theorem 5. *L'ensemble des points extrêmes du polytope X , correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.*

Theorem 6. *Si $\overline{c_N} \leq 0$ alors la solution de base réalisable correspondante est solution optimale du programme linéaire (P) .*

Exemple 7. déterminer les bases optimales du problème suivant :

$$\begin{aligned}
\max z &= x_1 + 2x_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_2 + x_4 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

nous avons déjà vérifié que B_1, B_3, B_4, B_6 étaient réalisables pour vérifier l'optimalité nous allons calculer le $\overline{c_N}$ associé.

$$\begin{aligned}
B_1 : \overline{c_N} &= c_N - c_B B^{-1} N \\
&= (0 \ 0) - (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -(1 \ 1) < 0.
\end{aligned}$$

B_1 est optimale, $z^* = c_B B^{-1} b = 9$.

$B_3 : \overline{c_N} = (1 \ -1)$. B_3 est non optimale, et $z^* = 6$.

$B_4 : \overline{c_N} = (1 \ -2)$. B_4 est non optimale, et $z^* = 6$.

$B_6 : \overline{c_N} = (1 \ 2)$. B_6 est non optimale, et $z^* = 0$. D'où la

seule base optimale est B_1 , la solution optimale correspondante

$$\text{est } x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Propriétés fondamentales de la programmation linéaire.

Proposition : 1. *Si une fonction linéaire atteint son maximum (ou minimum) sur le polytope X alors cet optimum a lieu en un sommet de X (point extrême de X).*

Proposition : 2. *Si $X \neq \emptyset$, il existe au moins un sommet (point extrême).*

Remarque : 2. – *Pour 100 contraintes de 400 variables choisir 100 colonnes parmi 400 est de l'ordre de 100^{100} sommets (age de l'univers $\approx 10^{18}$ secondes).*

– *L'algorithme du simplexe emprunte un chemin astucieux de façon à maximiser le profit.*

3.4 Opération de pivotage.

Definition 8. Etant donnée une $m \times n$ matrice A , $1 \leq r \leq m$ et $1 \leq s \leq n$ tels que $A_r^s \neq 0$. La matrice D définie par :

$$D_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, j \neq r \\ \frac{1}{A_r^s} & \text{si } j = i = r \\ -\frac{A_i^s}{A_r^s} & \text{si } j = r, i \neq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est appelée matrice de pivotage sur l'élément A_r^s de A .

Theorem 9. *Si on applique l'opération de pivotage à la matrice (A, b) du système $Ax = b$, on obtient la matrice (DA, Db) . Le système $DAx = Db$ est équivalent à $Ax = b$.*

3.5 Algorithme du simplexe à la main.

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

l'algorithme consiste à construire une suite de bases réalisables, de profit croissant jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de gain possible.

On prend comme base réalisable de départ la base $B = (A^3 \ A^4) =$

$$I. \begin{cases} x_3 = 6 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 3 - x_2 \\ z = 0 + x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \text{forme canonique par rapport à la base}$$

$$B. \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 - x_3 \\ x_4 = 3 - x_2 \\ z = 6 + x_2 - x_3 \end{cases} \quad \text{forme canonique par rapport à la}$$

base $B = (A^1 \ A^4)$.

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + x_4 \\ x_2 = 3 - x_4 \\ z = 9 - x_3 - x_4 \end{cases} \quad \text{forme canonique par rapport à la}$$

base $B = (A^1 \ A^2)$.

la solution optimale est $x^* = (3 \ 3 \ 0 \ 0)^t$;
 $z^* = 9$.

4 Algorithme du simplexe .

Etant donné un programme linéaire

$$(PP) \quad \begin{cases} \max & z = \zeta + cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

où A est une matrice $m \times n$ de rang m . (PP) est écrit sous forme canonique par rapport à une base B . 1. Si $c \leq 0$ la base B est optimale, et la solution de base associée est solution optimale de (PP) .

2. S'il existe s une colonne de A : $A^s \notin B$, avec $c_s > 0$ et $I = \{i : A_i^s > 0\} = \emptyset$ alors (PP) n'a pas de solution optimale.

3. S'il existe s une colonne de A : $A^s \notin B$, avec $c_s > 0$ et $I = \{i : A_i^s > 0\} \neq \emptyset$. Soit r tel que $\frac{b_r}{A_r^s} = \min_{i \in I} \left[\frac{b_i}{A_i^s} \right]$ et soit x_t

la variable correspondant à la $r^{i\grave{e}me}$ ligne de base càd que $A^t = e_r$ alors on vérifie après pivotage de la matrice des coefficients de (PP) sur A_r^s , que la base $B' = B + \{A^s\} \setminus \{A^t\}$ est réalisable et que le nouveau programme est écrit sous forme canonique par rapport à la nouvelle base B' .

4.1 Exemple.

Le programme (P) est écrit sous forme canonique par rapport à la base réalisable $B^0 = [3, 4, 5]$ (on écrit les indices des colonnes de A qui sont dans la base).

$$(P) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = 7 \\ x_2 + x_5 & = 3 \\ x_i \geq 0, j = 1, \dots, 5 \\ 4x_1 + 5x_2 = z(\max) \end{cases}$$

La solution de base associée à B^0 est

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 7, x_5 = 3 \text{ et } z = 0.$$

$$\bar{c}_N = (4, 5) > 0,$$

choisissons par exemple l'indice 1 qui entre en base $\bar{c}_1 = 4 > 0$,

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_i^1}; \bar{A}_i^1 > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{8}{2}, \frac{7}{1} \right\} = \frac{8}{2} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{A}_1^1} \implies B(r) = 3 \text{ sort de la base la nouvelle base est } B^1 = [1, 4, 5].$$

Après pivotage sur $\overline{A_1^1}$ on obtient

$$(P) \equiv \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 4 \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, j = 1, \dots, 5 \\ 3x_2 - 2x_3 = -8 + z(\max) \end{cases}$$

$$\bar{c} = (0, 3, -2, 0, 0) \quad \bar{c}_2 > 0 \quad \overline{A^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \min\{\frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{3}{\frac{3}{2}}, \frac{3}{1}\} =$$

$\frac{\bar{b}_2}{\overline{A_2^2}} = 2 \implies B(r) = 4$, la nouvelle base est $B^2 = [1, 2, 5]$ après pivotage sur $\overline{A_2^2}$ on obtient

$$(P) \equiv \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 2 \\ \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, j = 1, \dots, 5 \\ -x_3 - 2x_4 = -22 + z(\max) \end{cases}$$

$\bar{c} = (0, 0, -1, -2) \leq 0$, d'où la base est optimale et la solution de base est

$$x_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{N_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } z(\max) = 22.$$

4.2 Algorithme du simplexe.

On dispose d'une base réalisable B^0 .

1. B^0 base réalisable du départ. Itération $k = 0$.
2. $k \leftarrow k + 1$.

3. à l'itération k . Soit B la base courante $x = (x_B, x_N)$ la solution de base correspondante : calculer

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$\pi = c_B B^{-1} \text{ (les multiplicateurs du simplexe)}$$

$$\bar{c}_N = c_N - \pi N$$

4. si $\bar{c}_N \leq 0$: l'optimum est atteint.

si $\exists s$ tel que $\bar{c}_s > 0$ alors

5. soit A^s la colonne s de A : calculer $\bar{A}^s = B^{-1}A^s$

– si $A^s \leq 0$ stop : l'optimum est non borné $(+\infty)$

– sinon calculer $\hat{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_r^s} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_i^s} : \bar{A}_i^s > 0 \right\}$

6. soit x_t la variable correspondant à la $r^{\text{ième}}$ ligne de la base, c'est-à-dire telle que $B^{-1}A_t = e_r$ (m -vecteur à composantes toutes nulles sauf la composante r égale à 1); alors la variable s prend la valeur $\hat{x}_s > 0$ (entre en base); la variable t s'annule ($\hat{x}_t = 0$) (sort de la base) la nouvelle base réalisable $\hat{B} = B + \{A^s\} - \{A^t\}$, calculer l'inverse de la nouvelle base $\hat{B}^{-1}$ et retourner à (2).

Remarque : 3. - Dans (6) on a supposé que $\hat{x}_s > 0$ c'est-à-dire que $\bar{b}_r > 0$. Si $\bar{b}_r = 0$ alors la nouvelle solution obtenue est la même que la précédente, et ce sommet est représenté par plusieurs bases réalisables c'est un cas de dégénérescence. Si (P) est écrit sous forme canonique par rapport à une base optimale $\hat{B}$ alors :

- Si $\bar{c}_N < 0$ la solution de (P) est unique.

- Si $\exists \bar{c}_s = 0, s \in \hat{N}$ alors la solution n'est pas unique en générale. On peut choisir $\hat{x}_s = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{A}_i^s} : \hat{A}_i^s > 0 \right\}$, on détermine ainsi un ensemble de solutions réalisable pour lesquels $z = \hat{\zeta}$.

Theorem 10. Convergence finie.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'algorithme du simplexe converge en un nombre fini d'itérations.

Problèmes soulevés par la dégénérescence.

Dans le cas de dégénérescence où $\bar{b}_r = 0$, on a $\hat{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_r^s} = 0$. Alors la valeur de la fonction z ne varie pas après le changement de base (en effet $z(\hat{x}) = z_B + \bar{c}_s \hat{x}_s = z_B$).

Il est possible après un certain nombre de changements de bases de retrouver une base déjà rencontrée et de cycler indéfiniment.

On peut régler le problème de plusieurs façons.

1. Par perturbation des données du problème.
2. Par des règles de sélection du pivot (R.G. Bland 1977).

A chaque itération de l'algorithme du simplexe

- parmi toutes les variables susceptibles d'entrer en base (càd telles que $\bar{c}_s > 0$) choisir celle du plus petit indice.
- parmi toutes les variables susceptibles de quitter la base (càd toutes les variables x_r telles que $\frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_r^s} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_i^s} : \bar{A}_i^s > 0 \right\}$) choisir celle du plus petit indice.

Bland a montré que même en cas de dégénérescence cette règle assure la convergence finie de la méthode du simplexe.

4.3 Complexité de l'algorithme et efficacité pratique.

L'évaluation de la complexité d'un algorithme est l'étude du nombre maximal d'opérations élémentaires qu'il nécessite dans le pire des cas.

Kelle et Minty (1972) ont construit des problèmes nécessitant l'examen d'un nombre de sommets croissant exponentiellement en fonction de la taille du

problème (contraintes et variables) la complexité de la méthode du simplexe est donc exponentielle.

4.4 Initialisation de l'algorithme du simplexe.

Considérons le problème linéaire . $(P) \begin{cases} Ax = b & x \geq 0 \\ cx = z(\max) \end{cases}$

Forme standard. (On considère $b \geq 0$, si $\exists b_i < 0$ on multiplie l'équation par -1) Nous cherchons à trouver une base réalisable de (P) et à écrire (P) sous forme canonique par rapport à cette base. On considère le problème auxiliaire suivant :

$(PA) \begin{cases} Ax + Iv = b & x, v \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m v_i = \Psi(\min) \end{cases}$ Les variables v_i sont dites "artificielles".

Theorem 11. *L'algorithme du simplexe appliqué à*

$$(PA') \begin{cases} Ax + Iv = b & x, v \geq 0 \\ -eAx = \Psi(\min) - eb \end{cases} \quad (1)$$

écrit sous forme canonique par rapport à la base des variables artificielles, se termine toujours avec une solution optimale de base.

Theorem 12. *Soit $(\hat{x}, \hat{v})$ une solution optimale de (PA) . Une condition nécessaire et suffisante pour que (P) admette une solution réalisable, est que :*

$$\hat{v}_i = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

4.4.1 La méthode du grand M.

On introduit les variables artificielles directement dans la fonction objectif du problème d'origine :

$$\begin{cases} \max z = cx - M \sum_{i=1}^m v_i \\ Ax + Iv = b \\ x, v \geq 0 \end{cases}$$

et on résout ce problème par l'algorithme du simplexe en supposant que M est grand.

5 la notion de dualité.

La dualité est un concept fondamental en programmation linéaire et conduit à un résultat de grande portée théorique et pratique.

5.1 Théorèmes de dualité.

Soit le problème linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} Ax = b & x \geq 0 \\ cx = z(Max) \end{cases}$$

son dual est le programme linéaire suivant :

$$(D) \quad \begin{cases} yA \geq c \\ yb = w(Min). \end{cases}$$

Définition du dual dans le cas général.

Primal (Dual)		Dual (Primal)
Fonction objective (Max)		Fonction objective (Min)
$i^{\text{ème}}$ contrainte	$\geq$	$i^{\text{ème}}$ variable ≤ 0
$i^{\text{ème}}$ contrainte	$\leq$	$i^{\text{ème}}$ variable ≥ 0
$i^{\text{ème}}$ contrainte	$=$	$i^{\text{ème}}$ variable ≤ 0
$j^{\text{ème}}$ variable	≥ 0	$j^{\text{ème}}$ contrainte $\geq$
$j^{\text{ème}}$ variable	≤ 0	$j^{\text{ème}}$ contrainte $\leq$
$j^{\text{ème}}$ variable	≤ 0	$j^{\text{ème}}$ contrainte $=$

Example 13.

$$\text{Primal} \quad \begin{cases} \min 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dual} \quad \begin{cases} \max u_1 + 4u_2 + 3u_3 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 2 \\ -u_1 + 3u_2 + u_3 = -3 \\ u_1 \leq 0, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0 \end{cases}$$

Lemma 14. *Pour tout couple de solutions $\bar{x}, \bar{y}$ respectivement réalisables pour (P) et pour (D) on a*

$$c\bar{x} \leq \bar{y}b.$$

Corollary 15. *Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont respectivement des solutions réalisables des programmes (P) et (D) et si de plus $c\bar{x} \geq \bar{y}b$ alors*

- $c\bar{x} = \bar{y}b$
- $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont respectivement des solutions optimales de (P) et (D).

Lemma 16. *Si (P) admet un optimum à valeur finie, soient π^* les multiplicateurs du simplexe associés à une solution optimale x^* de (P) . Alors π^* est une solution réalisable du problème dual et $cx^* = \pi^*b$. (π^* est donc solution optimale du dual).*

Theorem 17. *Théorème de dualité.*

Soient (P) et (D) deux problèmes duaux

– a) Si (P) et (D) ont des solutions réalisables, alors ils ont des solutions optimales et

$$z^* = \text{Max}(P) = \text{Min}(D).$$

– b) Si l'un d'entre eux a un optimum non borné, l'autre n'a pas de solution réalisable.

Theorem 18. *Théorème de Complémentarité :*

Deux solutions $(\bar{x}, \bar{y})$ du primal et du dual respectivement sont optimales ssi

$$(\bar{y}A_j - c_j)\bar{x}_j = 0 \forall j = 1, \dots, n.$$

($A_j = j^{\text{ème}}$ colonne de A).

Theorem 19. *Lemme de Farkas.*

Si pour tout m -vecteur y tel que

$$yA \leq 0 \text{ on a } yb \leq 0, \text{ alors } \exists x \geq 0 \text{ tel que } Ax = b.$$

Theorem 20. *Théorème des alternatives.*

L'un et seulement l'un des systèmes de contraintes suivants a une solution :

$$(I) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} yA \leq 0 \\ yb > 0 \end{cases}$$

5.2 Interprétation économique de la dualité.

Considérons le problème linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \max z = 500x_1 + 700x_2 \\ 40x_1 + 30x_2 \leq 360 \text{ (I)} \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 480 \text{ (II)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

on ajoute les variables d'écart x_3 et x_4 aux deux contraintes (I) et (II).

$$\begin{cases} \max z = 500x_1 + 700x_2 \\ 40x_1 + 30x_2 + x_3 = 360 \\ 20x_1 + 30x_2 + x_4 = 480 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

on applique l'algorithme du simplexe sur ce dernier problème avec la base de départ $B_1 = \{x_3, x_4\}$. x_2 entre en base et x_3 sort de la base ; On écrit le problème sous forme canonique par rapport à la nouvelle base $B_2 = \{x_2, x_4\}$

$$\begin{cases} \max z = 8400 - \frac{1300}{3}x_1 - \frac{70}{3}x_3 \\ \frac{4}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{30}x_3 = 12 \\ -20x_1 - x_3 + x_4 = 120 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$\overline{c_N} = (-\frac{1300}{3}, -\frac{70}{3}) \leq 0$, d'où la solution est optimale. La solution optimale est $(x_1^* = 0, x_2^* = 12)$ et $z^* = 8400$.

Le directeur veut augmenter les quantités des ciments fabriqués, il se demande de combien il est raisonnable de les augmenter pour utiliser une unité supplémentaire des biens (I) et (II).

On augmente la disponibilité du produit (I) d'une unité de combien le profit augmentera-t-il ? Le programme (P) sera modifié en

remplaçant 360 par 361 dans le second membre de la première inégalité. On trouve que la même base est optimale, et que

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0; x_2^* = \frac{36.1}{3} \\ z^* &= 700 \times \frac{36.1}{3} \\ &= 8400 + 700 \times \frac{0.1}{3} \approx 8400 + 23.33 \end{aligned}$$

Donc une unité supplémentaire du produit 1 vaut "23.33" pour le directeur de l'usine, c'est à dire que si le prix d'une minute de four est inférieure à "23.33" le directeur à intérêt à augmenter la disponibilité du four. Donc le fonctionnement de l'usine permet de définir des prix pour les différentes matières premières sur le marché, c'est un prix marginale. Le même raisonnement est fait pour le bien (II), on trouve que la valeur optimale ne change pas, donc on n'a pas intérêt à augmenter la disponibilité du broyeur. $y_1 = \frac{70}{3}, y_2 = 0$ sont les prix marginaux, et correspondent à la solution optimale du dual de (P).

Theorem 21. *La variation de la valeur optimale, de la fonction objective de (P),*

$$(P) \begin{cases} \max cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

pour une variation δb suffisamment faible du second membre, pour que la base optimale de (P) reste optimale pour (P_δ) ,

$$(P_\delta) \begin{cases} \max cx \\ Ax = b + \delta b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

est $\bar{y}\delta b$, (où $\bar{y}$ est solution optimale du dual de (P)).

6 Exercices

Exercices1 :

Considérons le programme linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Mettre ce programme sous forme canonique, sous forme standard.
2. Le problème étant mis sous la forme standard, on a $m = 3$ et $n = 6$

Ecrire A_2, A^3, A^4 posons $I = \{1, 3\}$ et $J = \{2, 4, 5\}$.

Ecrire $b_I, C^J, A_I, A^J, A_I^J$.

Exercices2 :

Montrer que le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min C.x \\ A.x = b \\ \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

est un programme linéaire. L'écrire sous forme standard.

Exercices3 :

Montrer que le problème d'optimisation :

$$(P) \quad \begin{cases} \min c.x - \sum_{i=1}^n |v_i| \\ A.x - Uv = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(où U est la matrice unité de la forme (m, m)), peut s'écrire sous forme d'un programme linéaire.

Exercices4 :

Un grossiste désire renouveler son stock de savon. Il s'adresse à trois fabricants $F1$, $F2$ et $F3$ pour une commande de 20 unités (unité=100kg). Il est cependant tenu d'acheter une quantité non nulle aux fabricants $F1$ et $F2$.

Quelles sont les commandes à passer à chacun de ces fournisseurs de manière à avoir une dépense minimale, si l'on sait que

- $F1$ peut fournir au maximum 10 unités, mais n'accepte jamais une commande inférieure à 5 unités.
- $F2$ peut fournir au maximum 8 unités, mais n'accepte jamais une commande inférieure à 4 unités.
- $F3$ peut fournir au maximum 9 unités.
- Les prix d'achat unitaires (en centaines de DH) auprès de chaque fabricant sont les suivants :
 - $F1$: 11 pour les 5 premiers et 9 pour les suivants.
 - $F2$: 8.
 - $F3$: 10.

Exercice5 :

Un editeur dispose de deux dépôts, D_1 et D_2 , possédant respectivement 5 et 4 exemplaires d'un ouvrage. Trois libraires, L_1 , L_2 , L_3 lui demandant respectivement 2, 3 et 4 exemplaires de cet ouvrage au cours de la journée. Si les coûts unitaires de transport des dépôts vers les libraires sont les quantités indiquées dans le tableau ci-dessous, déterminer le plan de transport de coût minimums.

	L_1	L_2	L_3
D_1	2	5	2
D_2	7	3	6

Exercice6 :

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \max z = x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ x_i \geq 0, t_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1. Donner toutes les solutions de bases de (P) .
2. Donner les solutions de bases réalisables de (P) .
3. Représenter graphiquement les solutions de bases et les solutions de bases réalisables. Résoudre graphiquement le problème.
4. Déterminer la base optimale, puis écrire le problème sous forme canonique par rapport à cette base.

Exercice7 :

Considérons les problèmes suivants :

$$(1) \quad \begin{cases} \min z = x_2 - x_1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \max z = 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \\
 (3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \min z = x_2 - x_1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \leq -8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{et le problème } (P)
 \end{aligned}$$

1. Résoudre les quatre problèmes avec la méthode du simplexe.
2. Ecrire leur problèmes duaux
3. Pour le problème (1) donner une solution primale réalisable et une solution duale réalisable, puis vérifier le Théorème de dualité.
4. a. Vérifier dans le problème (1) le théorème de dualité pour $x^* = (6, 8)$ et $y^* = (\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, 0)$.
- b. Vérifier le théorème de dualité pour $x^* = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ et $y^* = (0, -1, 0)$.

Exercice8 :

Soit le programme linéaire :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min 3x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- a) La solution définie par $x_1 = 3, x_2 = 1$ est-elle réalisable ? optimale ?
- b) La solution définie par $x_1 = \frac{26}{9}, x_2 = \frac{7}{9}$ est-elle réalisable ? optimale ?

Exercice9 :

Montrer en utilisant le théorème des écarts complémentaires et en effectuant le moins de calcul possible que : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 0$ est solution optimale de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5. \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 \leq 0 \\ \quad \quad \quad 2x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 4 \\ 3x_1 + \quad \quad 4x_3 \quad \quad + x_5 \leq 3 \\ \quad \quad x_2 - x_3 \quad \quad + 2x_5 \leq 2 \\ \quad \quad 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{array} \right.$$

Exercice10 :

utiliser le lemme de Farkas pour montrer que les solutions du système $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 0 \end{cases}$ ne sont pas toutes solutions de $4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 0$.