

PHYSIQUE QUANTIQUE

1. L'ESPACE DES FONCTIONS

1.1. Fonction d'onde :

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \iiint_{\text{esp } \vec{p}} \tilde{\Psi}(\vec{p}) e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{p}$$

Densité de probabilité de présence :

$$\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

Fonction de carré sommable :

$$\iiint_{\text{esp}} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = 1$$

$\tilde{\Psi}(\vec{p}, t)$ est la transformée de Fourier de $\Psi(\vec{r}, t)$:

$$\tilde{\Psi}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \iiint_{\text{esp } \vec{r}} \Psi(\vec{r}) e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d^3\vec{r}$$

Relation entre $\vec{r}$ et $\vec{p}$:

$$\langle \vec{r} \rangle = \iiint_{\text{esp}} \Psi^*(\vec{r}, t) \cdot \Psi(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$$

$$\langle \vec{p} \rangle = \iiint_{\text{esp}} \Psi^*(\vec{r}, t) \cdot (-i\hbar) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$$

Equation de Schrödinger :

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V[\vec{r}] \right) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

1.2. L'espace des états. Notation de Dirac. Kets et Bras.

$\langle \varphi | \psi \rangle$, produit scalaire avec $\langle \varphi |$, appelé bra et $|\psi\rangle$, appelé ket.

$$\lambda |\psi_1\rangle + \mu |\psi_2\rangle \xrightarrow[\text{associé}]{\text{bra}} \lambda^* \langle \psi_1| + \mu^* \langle \psi_2|$$

Bases orthonormées :

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Projection sur une base :

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i | \psi \rangle \cdot |u_i\rangle$$

Relation de fermeture :

$$\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| = Id$$

$$\iiint_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| d^3\vec{p} = Id$$

où Id est l'opérateur identité.

Orthonormalisation au sens des bases continues :

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

1.3. Opérateurs linéaires :

$$|\psi_1\rangle \xrightarrow{A} A|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$$

Les opérateurs sont linéaires si :

$$A(\lambda |\psi\rangle + \mu |\psi'\rangle) = \lambda A|\psi\rangle + \mu A|\psi'\rangle$$

Valeur propre et ket propre :

$$A|\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \text{ où } |\lambda\rangle \neq |0\rangle, \text{ ket nul. Alors } |\lambda\rangle \text{ est un ket propre associé à la valeur propre } \lambda$$

Action d'un opérateur sur un bra :

$$|\psi\rangle \xrightarrow{A} A|\psi\rangle \xrightarrow{\langle \varphi|} \langle \varphi | A | \psi \rangle$$

Adjoint d'un opérateur :

$$\langle \psi_1 | A | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | A^+ | \psi_1 \rangle$$

$$(\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$$

$$(BC)^+ = C^+ B^+$$

Opérateur X :

$$\langle x | X | \psi \rangle = x \psi(x)$$

$$\langle \psi | x \rangle = \psi^*(x)$$

$$X^+ = X$$

On dit que X est auto adjoint.

Opérateur hermitique :

$$A^+ = A, \text{ alors } A \text{ est hermitique.}$$

Les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles, et les kets propres associées à ces valeurs propres sont orthogonaux.

14. Commutateurs :

$$[A, B] = AB - BA$$

Propriétés des commutateurs :

$$[A, \lambda B + \mu C] = \lambda [A, B] + \mu [A, C]$$

$$[A, B] = -[B, A]$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

Si A et B commutent, on peut trouver un ensemble de kets propres communs à A et B .

1.5. Opérateurs position et impulsion, $\vec{R}$ et $\vec{P}$:

$$\langle \vec{r} | \vec{R} | \psi \rangle = \vec{r} \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

$$\langle \vec{p} | \vec{P} | \psi \rangle = \vec{p} \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

Changement de base, $\vec{P}$ en représentation $\vec{r}$ et vice versa :

$$\langle \vec{r} | \vec{P} | \psi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla} \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

$$\langle \vec{p} | \vec{R} | \psi \rangle = i\hbar \vec{\nabla} \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

Commutateur :

$$[X, P_x] = i\hbar Id$$

On donne :

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

1.6. Représentation d'un opérateur dans une base :

L'ensemble des $\langle u_i | A | u_j \rangle$ est la matrice (A) :

$$(A) = \begin{pmatrix} \langle u_1 | A | u_1 \rangle & \langle u_1 | A | u_2 \rangle & \dots \\ \langle u_2 | A | u_1 \rangle & \langle u_2 | A | u_2 \rangle & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

(A) représente A dans la base $\{|u_i\rangle\}$

Adjoint de l'opérateur:

$$(A^+) = {}^t(A)^*$$

2. LES POSTULATS DE LA MECANIQUE QUANTIQUE .

2.1. Postulats de représentation :

A un instant t fixé, l'état d'un système physique est représenté par un ket $|\psi(t)\rangle$ appartenant à l'espace des états : E . L'espace E est un espace de Hilbert.

Toute grandeur physique mesurable A , est représenté par un opérateur A agissant dans l'espace des états E . L'opérateur A est une observable.

2.2. Postulats de mesure :

La mesure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat que l'une des valeurs propres de l'observable A correspondante.

Lors de la mesure d'une grandeur physique A sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé, la probabilité d'obtenir comme résultat la valeur propre a_n dégénéré g_n fois de l'observable A correspondante est,

- dans le cas d'un spectre discret :

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle a_n^i | \psi \rangle|^2$$

où les $\{|a_n^i\rangle; i=1, g_n\}$ constituent une base orthonormée du sous-espace propre de A associé à la valeur propre a_n .

- dans le cas d'un spectre continu, la probabilité d'obtenir un résultat compris entre α et $\alpha + d\alpha$ vaut :

$$d\mathcal{P}(\alpha) = |\langle \alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha$$

où $|\alpha\rangle$ est le ket propre « normé » de l'observable A associé à la valeur propre α .

Si la mesure d'une grandeur physique A sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé a donné le résultat a_n , l'état du système immédiatement après la mesure est la projection normée de $|\psi\rangle$ sur le sous-espace propre de A associé à a_n : (cas d'un spectre discret) :

$$|\psi\rangle \xrightarrow[A \rightarrow a_n]{\text{mesure de}} \frac{\sum_{i=1}^{g_n} |a_n^i\rangle \langle a_n^i | \psi \rangle}{\left(\sum_{i=1}^{g_n} |\langle a_n^i | \psi \rangle|^2 \right)^{1/2}}$$

2.3. Postulat d'évolution :

L'équation décrivant l'évolution dans le temps de l'état $|\psi(t)\rangle$ d'un système physique est l'équation de Schrödinger :

$$H |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$

où le Hamiltonien H est l'observable associée à l'énergie totale du système.

2.4. Règles de quantification :

L'observable A correspondant à la grandeur physique $\mathcal{A}$ définie classiquement s'obtient en remplaçant dans l'expression convenablement symétrisée de $\mathcal{A}$ les variables $\vec{r}$ et $\vec{p}$ par les observables $\vec{R}$ et $\vec{P}$. Les observables ne correspondant pas à des grandeurs physiques classiques seront bâties directement.

2.5. Interprétation des postulats sur la mesure :

Valeur moyenne :

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

on notera souvent $\langle \mathcal{A} \rangle = \langle A \rangle$

Ecart quadratique moyen :

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle_{|\psi\rangle} - \langle A \rangle_{|\psi\rangle}^2$$

2.6. Compatibilité des mesures :

A et B deux observables :

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

Cas particulier :

$$\begin{cases} \Delta X \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta Y \cdot \Delta P_y \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta Z \cdot \Delta P_z \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

2.7. Evolution de la valeur moyenne :

$$\frac{d}{dt} (\langle A \rangle(t)) = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

si $\frac{d}{dt} \langle A \rangle = 0 \Rightarrow \langle A \rangle$ est une constante du mouvement, alors on peut trouver une

base de vecteurs propres à A et H , on trouvera toujours la même valeur si on mesure A ultérieurement, on parle alors de bon nombre quantique pour a .

2.8. Théorème d'Erenfest :

$$[\vec{R}, H] = \frac{i\hbar}{m} \vec{P} \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{R} \rangle = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{m}$$

$$[\vec{P}, H] = [\vec{P}, V(\vec{R})] = -i\hbar (\vec{\nabla} V)(\vec{R}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{P} \rangle = -\langle \vec{\nabla} V(\vec{R}) \rangle$$

2.9. Opérateur d'évolution :

$$U(t, t_0) |E_n\rangle = e^{-iE_n \frac{t-t_0}{\hbar}} |E_n\rangle$$

Dans le cas des états stationnaires :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_n \frac{t-t_0}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle$$

2.10. Fréquences de Bohr :

$$\nu_{n'n} = \frac{|E'_n - E_n|}{h}$$

avec $2\pi\hbar = h$.

2.11. Relation d'incertitude temps-énergie :

Etat stationnaire, l'énergie est une valeur sûre, $\Delta E = 0$, donc il n'y a pas d'évolution, $\Delta T = \infty$.

Période d'évolution pour seulement deux fréquences possibles :

$$T = \frac{h}{|E_2 - E_1|}$$

On a alors :

$$\frac{\Delta A}{\left| \frac{d}{dt} \langle A \rangle \right|} = \tau_A \text{ et } \tau_A \Delta E = \frac{\hbar}{2}$$

3. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE.

3.1. Le Hamiltonien :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2$$

Si on pose :

$$\begin{cases} \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \\ \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\hbar m \omega}} P \end{cases} \rightarrow H = \frac{\hbar \omega}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$$

Soit alors,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$$

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \frac{1}{\hbar} [X, P] = i.Id$$

Il faut alors résoudre l'équation aux valeurs propres :

$$\hat{H}|\varepsilon\rangle = \varepsilon|\varepsilon\rangle$$

A nouveau, on pose :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \\ a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^+) \\ \hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (a - a^+) \end{cases}, \text{ et}$$

$$N = a^+ a \Rightarrow \hat{H} = N + \frac{1}{2}.Id$$

3.2. Valeurs propres

On calcule :

$$Na|\nu\rangle = (\nu-1)a|\nu\rangle, \text{ avec } Na = aN - a$$

Comme N est hermitique, $a|\nu\rangle$ est ket propre de N associé à la valeur propre $(\nu-1)$ sauf si $a|\nu\rangle = |0\rangle$, ket nul.

3.3. Vecteurs propres :

On calcule :

$$Na^+|\nu\rangle = (\nu+1)a^+|\nu\rangle, \text{ avec } Na^+ = a^+N + a^+$$

Si $|\nu\rangle$ est ket propre de N avec valeur propre ν , alors $a^+|\nu\rangle$ est ket propre de N associé à la valeur propre $\nu+1$.

Soit $|n\rangle$ un ensemble de kets propres normés de l'opérateur a^+ , il vient :

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle \text{ et } a|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} n |n-1\rangle$$

Il faut vérifier les relations de fermetures et d'orthonormalisation pour faire de $\{|n\rangle\}$ une base de l'observable H .

Vecteurs propres de a et a^+ :

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \text{ } n \text{ est un entier}$$

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases}$$

3.4. Projection de $|n\rangle$ sur la base des $|x\rangle$:

$$\langle x|n\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2},$$

où H_n est un polynôme de Hermite.

4. LE MOMENT CINÉTIQUE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE :

4.1. Moment cinétique orbital :

Le moment cinétique orbital est défini par l'opérateur vectoriel :

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}$$

$\vec{L}$ est hermitique.

Commutateurs :

$$\vec{L} \rightarrow \begin{cases} L_x = YP_z - ZP_y \\ L_y = ZP_x - XP_z \\ L_z = XP_y - YP_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [L_x, L_y] = i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] = i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y \end{cases}$$

On appellera moment cinétique orbital tout opérateur vectoriel $\vec{L}$ dont les composantes cartésiennes satisferont les relations de commutation précédentes.

Généralisation :

On bâtit : $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, alors $\vec{J}^2$ est une observable.

Commutateurs :

$$\begin{cases} [\vec{J}^2, J_x] = 0 \\ [\vec{J}^2, J_y] = 0 \\ [\vec{J}^2, J_z] = 0 \end{cases}$$

4.2. Valeurs propres et kets propres du moment cinétique :

On cherche des kets propres communs à $\vec{J}^2$ et J_z :

On définit deux opérateurs :

$$\begin{cases} J_+ = J_x + iJ_y \\ J_- = J_x - iJ_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$$

Relations de commutation :

$$\begin{cases} [J_+, J_z] = -\hbar J_+ \\ [J_-, J_z] = \hbar J_- \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \\ [\vec{J}^2, J_+] = [\vec{J}^2, J_-] = 0 \end{cases}$$

Réécriture de $\vec{J}^2$:

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

4.3. Equations aux valeurs propres de $\vec{J}^2$ et J_z :

$$\begin{cases} \vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ j \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

4.4. Propriétés des kets $J_+ |jm\rangle$ et $J_- |jm\rangle$:

$$\begin{cases} \|J_+ |jm\rangle\|^2 = \hbar^2 [j(j+1) - m(m+1)] \\ \|J_- |jm\rangle\|^2 = \hbar^2 [j(j+1) - m(m-1)] \\ \begin{cases} \vec{J}^2 J_+ |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_+ |jm\rangle \\ J_z J_+ |jm\rangle = (m+1)\hbar J_+ |jm\rangle \end{cases} \\ \begin{cases} \vec{J}^2 J_- |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 J_- |jm\rangle \\ J_z J_- |jm\rangle = (m-1)\hbar J_- |jm\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Il vient alors :

$$J_+ |jm\rangle = C_+ |jm+1\rangle, \text{ et}$$

$$J_- |jm\rangle = C_- |jm-1\rangle.$$

4.5. Valeurs propres de $\vec{J}^2$ et J_z :

Limites de m :

$$\begin{cases} \|J_+ |jm\rangle\|^2 = 0 \Rightarrow m = j \\ \|J_- |jm\rangle\|^2 = 0 \Rightarrow m = -j \end{cases} \Rightarrow \boxed{-j \leq m \leq j}$$

4.6. Kets propres communs à $\vec{J}^2$ et à J_z

$$\begin{cases} J_+ |j m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j m+1\rangle \\ J_- |j m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j m-1\rangle \end{cases}$$

dans une base standard, on a choisit une phase.

Avec $\{|j m\rangle\}$ une base orthonormée.

Orthogonalité :

$$\langle l m | l' m' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Fermeture :

$$\sum_{lm} |l m\rangle \langle l m| = Id$$

4.7. Application au moment cinétique orbital :

$$(\vec{L})_{\{\vec{r}\}} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla}$$

$$\text{avec } \vec{\nabla} = \vec{u}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Pour les composantes de $\vec{L}$, on a donc :

$$\begin{cases} (L_x)_{\{\vec{r}\}} = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ (L_y)_{\{\vec{r}\}} = i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ (L_z)_{\{\vec{r}\}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (L_+)_{\{\vec{r}\}} = \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ (L_-)_{\{\vec{r}\}} = \hbar e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{cases}$$

Equations aux valeurs propres en coordonnées sphériques :

$$(\vec{L})_{\{\vec{r}\}} = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

4.8. Harmoniques sphériques :

$$\begin{cases} (L_+) Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_l^{m+1}(\theta, \varphi) \\ (L_-) Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_l^{m-1}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Et on a pour les opérateurs moments cinétique :

$$\begin{cases} (L_z) Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \varphi) \\ (\vec{L}^2) Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi) \end{cases}$$

On obtient :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^{m+|m|} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

LE SPIN.

On bâtit l'opérateur de spin, $\vec{S}$, tel que : $\vec{S}$ est un moment cinétique, $\vec{S}$ est une observable pour l'espace des états de spin.

$$\begin{cases} [S_x, S_y] = i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] = i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] = i\hbar S_y \end{cases}$$

S_x , S_y , S_z et $\vec{S}$ agissent dans un nouvel espace, l'espace des états de spin :

$\mathcal{E}_s$ dans lequel $\{\vec{S}^2, S_z\}$ constituent un ECOC . Une base de ces états est

$\{|sm_s\rangle\}$:

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 |sm_s\rangle &= \hbar^2 . s(s+1) |sm_s\rangle \\ S_z |sm_s\rangle &= \hbar . m_s |sm_s\rangle \end{aligned}$$

Cas du spin $\frac{1}{2}$:

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \begin{cases} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dans la base des états de spin $\left\{ \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}$, on a les représentation matricielles :

$$\begin{aligned} (S_+) &= \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (S_x) &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (S_z) &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (S_-) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{pmatrix} & (S_y) &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & (\vec{S}^2) &= \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Matrices de Pauli :

On appelle matrice toute matrice σ telle que :

$$(\vec{S}) = \frac{\hbar}{2} (\vec{\sigma}), \text{ ici :}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Principales propriétés des matrices de Pauli :

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = Id$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0$$

$$\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$$

$$\sigma_y \sigma_z = i\sigma_x$$

$$\sigma_z \sigma_x = i\sigma_y$$